(Petite) histoire des équations algébriques

Arnaud Beauville

Université Côte d'Azur

Mai 2020

Préhistoire : l'équation du second degré

Tablette babylonienne BM 13901 ($\sim$1800 av. J-C) :

Solution de $x^2 - x = 870$:

« J'ai soustrait le côté de mon carré de son aire : 870. Prenez 1, le coefficient. Divisez 1 en 2 parties : 0,5. Multipliez 0,5 par lui-même : 0,25. Ajoutez à 870 : 870,25 qui a la racine 29,5. Ajoutez à 29,5 le 0,5 que vous avez multiplié par lui-même : 30, c'est le côté du carré. »

Quelques remarques

- En fait les babyloniens comptaient en base 60.
- Le problème est de nature arithmétique : géométriquement soustraire une longueur d'une aire n'a pas de sens.
- "La" solution est la solution **positive** : les nombres négatifs sont inconnus. Ce problème va handicaper le développement de l'algèbre jusqu'au 17ème siècle. Par exemple, il faut distinguer trois types d'équations du second degré :

$$x^2 + px = q \quad , \quad x^2 = px + q \quad , \quad x^2 + q = px \ .$$

Chacun de ces types d'équations est considéré dans les textes babyloniens ; bien entendu, avec des exemples numériques, et sous forme de problèmes concrets comme ci-dessus – la notation algébrique moderne n'est apparue qu'au 17ème siècle.

Nombres irrationnels

- La notion de nombre irrationnel est aussi absente. La plupart des problèmes sont posés de façon à admettre une solution entière. Quand ce n'est pas le cas, on approxime : on trouve dans une tablette babylonienne une approximation de $\sqrt{2}$ correcte à 10^{-5} près.

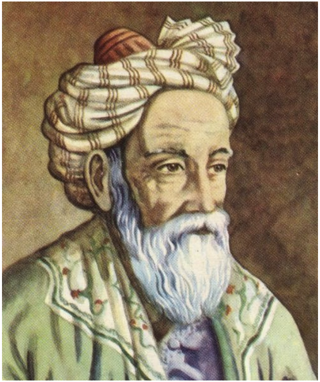
- Les Grecs, au contraire, découvrent l'existence des nombres irrationnels, en particulier celle de $\sqrt{2}$ (école de Pythagore, 5$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C.). Cette découverte semble avoir produit une grande méfiance vis-à-vis de la notion de nombre, et explique sans doute en partie que les mathématiques grecques soient centrées sur la géométrie.

Al-Khwârizmî

Ce sont les mathématiciens arabes qui vont reprendre l'étude des

équations. Le plus célèbre est Muhammad AL-KHWÂRIZMÎ (~780-850), auteur du premier livre d'algèbre : "*Hisab al-jabr w'al-muqabala*". Il introduit les règles de base de l'algèbre, puis fait une étude systématique des équations du 2ème degré. Il distingue 6 types suivant les signes des coefficients : $x^2 + px = q$ ("carré plus racine égal à un nombre"), $x^2 = px + q$, ... , et explique dans chaque cas comment trouver la solution. Il en donne ensuite une démonstration géométrique, par ce qu'on a appelé longtemps la "complétion du carré" : $x^2 + px = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4}$.

Omar Khayyam



Omar KHAYYAM (1048-1131), persan, est surtout connu comme poète pour ses quatrains (le *Rubaiyat*). Comme beaucoup de mathématiciens de l'époque, il était aussi astronome. En algèbre il a commencé l'étude des équations du 3ème degré, qu'il résoud graphiquement : par exemple le point d'intersection de la parabole $y = \frac{x^2}{a}$ avec le cercle de centre $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ passant par O a pour abscisse x solution de $x^3 + a^2x = ca^2$.

Il discute ainsi les 6 types d'équations du 3ème degré à 3 termes :

$$x^3 + px = q \ , \quad x^3 + q = px \ , \quad x^3 = px + q \ ,$$

en indiquant dans chaque cas une solution géométrique.

La renaissance italienne

La seconde moitié du 15ème siècle est en Italie une période d'effervescence intellectuelle, artistique et scientifique. La découverte de la perspective et sa codification (Piero della Francesca, Léonard de Vinci) créent le besoin d'une base mathématique solide.

En 1494, Luca Pacioli publie la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, somme des connaissances de l'époque, un des premiers livres de mathématiques imprimé.

Il traite surtout l'équation du second degré, mais discute à la fin les équations de degré plus grand et déclare que leur résolution est "impossible dans l'état actuel de la science".

Scipione del Ferro

Dès lors le problème majeur est celui de l'équation du 3ème degré "nombre, chose et cube", c'est-à-dire sans terme en x^2 (la "chose", *cosa* en italien, désigne l'inconnue). On sait maintenant que toute équation de degré 3 se ramène à ce cas en faisant une translation sur la variable, mais ce procédé, qui peut transformer une racine positive en racine négative, n'est pas utilisé à l'époque. Compte tenu des signes des coefficients, il y a donc 3 cas :

$$x^3 + px = q \quad , \quad x^3 = px + q \quad , \quad x^3 + q = px \; .$$

Scipione DEL FERRO (1465-1526, professeur à l'Université de Bologne) résoud le premier cas vers 1515 mais garde le résultat secret jusque peu avant sa mort, en 1526, où il révèle sa méthode à son (médiocre) élève Antonio DEL FIORE. Celui-ci s'en vante publiquement, mais il va vite trouver son maître.

Tartaglia

Nicolo de Brescia (1499–1557), dit TARTAGLIA ("le bègue"), avait eu une partie du visage détruit à 13 ans lors du sac de Brescia, sa ville natale, par les Français – ce qui explique son surnom ainsi que la superbe barbe qu'il porte sur tous ses portraits. Autodidacte, il enseigne au niveau secondaire à Vérone puis Venise, mais acquiert peu à peu une solide réputation de mathématicien.

En 1535 est organisée une compétition entre del Fiore et Tartaglia. Chacun propose à l'autre 30 problèmes. Del Fiore donne tous ses problèmes sous la forme du premier type, résolu par del Ferro. Mais quelques jours avant Tartaglia avait découvert la solution de tous les cas, et résoud les 30 problèmes en moins de 2 heures, tandis que del Fiore fait médiocre figure.

Cardan

Girolamo CARDANO (1501–1576) est un personnage hors du commun : mathématicien, médecin, astrologue, mécanicien... et joueur invétéré. Cardan explique qu'il avait pris au pied de la lettre l'affirmation de Pacioli suivant laquelle il était impossible de résoudre l'équation du 3ème degré ; il est donc très étonné par l'annonce de cette résolution, et il demande à Tartaglia de lui expliquer sa méthode. Tartaglia commence par refuser. Cardan lui fait miroiter ses relations haut placées, en particulier le gouverneur de Milan, qui pourrait favoriser sa carrière. En 1539 Tartaglia accepte de faire le voyage de Venise à Milan ; il se laisse convaincre, en faisant jurer à Cardan de ne jamais divulguer la solution, qu'il écrit sous forme de poème :

Cardan

Quand le cube et la chose ensemble sont égaux à un nombre donné,
Trouvez deux autres nombres qui diffèrent de celui-ci.
De plus prenez pour habitude que leur produit soit toujours égal
au cube tiers de la chose. Le résultat, de manière générale, de la soustraction
de leurs racines cubiques sera égal à la chose principale.

En termes modernes : on cherche la solution de $x^3 + px = q$ sous la forme $x = u - v$. Comme $(u-v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u-v)$,

$$\text{on a} \qquad x^3 + px = u^3 - v^3 + (u-v)(-3uv + p) = q\,.$$

donc l'équation est satisfaite si $3uv = p$ et $u^3 - v^3 = q$, i.e.
$u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ("leur produit est égal au cube tiers de la chose.")
$u^3 - v^3 = q$ ("les deux nombres diffèrent du nombre donné.")

$$\text{Donc} \quad u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

Cardan-Tartaglia

... d'où ce qu'on appelle maintenant la formule de Cardan.

Partant de cette formule, Cardan et son élève Ferrari font des progrès remarquables : résolution des différents cas cubiques, et même de l'équation du 4ème degré (Ferrari, 1540). Cardan remarque vite que le 2ème cas $x^3 = px + q$ peut conduire à prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Il pose la question à Tartaglia, qui lui répond de manière très désagréable :

« ... je vous réponds que vous n'avez pas maîtrisé la vraie manière de résoudre les problèmes de ce type ; en fait je dirais que vos méthodes sont totalement fausses. »

En 1543 Cardan trouve à Bologne les carnets de Scipione del Ferro. Il décide alors de publier la formule dans son *Ars magna* (1545), en citant les contributions de del Ferro et Tartaglia ("*amicus noster*").

Cardan-Tartaglia (suite)

Tartaglia est furieux et insulte violemment Cardan, qui est maintenant reconnu comme le plus grand mathématicien de son temps. Ferrari répond à ces attaques en défiant Tartaglia. Celui-ci veut débattre avec Cardan, plus connu que son élève ; il accepte finalement en 1548 un débat public avec Ferrari.

Le débat a lieu dans une église à Milan, devant une grande foule comprenant les personnalités locales, y compris le gouverneur de Milan. A la fin du premier jour il est clair que Ferrari maîtrise le sujet mieux que Tartaglia. Celui-ci quitte Milan à la nuit tombée et rentre à Venise, laissant la victoire à son rival.

Consolidation : 1570-1770

L'invention de la notation algébrique moderne est souvent attribuée à François VIÈTE (1540-1603). Mathématicien amateur, Viète a fait une carrière de conseiller politique d'abord à Rennes, puis à Paris, avec une interruption de 5 ans (guerres de religion), pendant laquelle il écrit son livre d'algèbre (1591).

Ses notations sont encore assez loin des nôtres. Il est le premier à désigner les quantités par des lettres. Mais il insiste bizarrement sur l'homogénéité des formules : chaque lettre reçoit donc une dimension, de façon que l'ensemble soit homogène. Ainsi l'équation $A^3 + 3BA = 2Z$ (inconnue A, coefficients B et Z) est écrite :

Proponatur A cubus + B plano 3 in A aequari Z solido 2

pour marquer que B est une aire (*plano*), Z un volume (*solido*).

Un passage de Viète

THEOREMA VII.

SI D planum in A — A cubo, æquetur Z ſolido. A + B eſto E. $\overline{\text{D planum} - \text{B quad. } 3}$ in E + B in E quad. 3 — E cubo, æquabitur Z ſolido + D plano in B — B cubo.

Quoniam enim D planum in A — A cubo, æquatur Z ſolido: eſt autem A + B radici E æqualis, igitur E — B æquabitur A. Itaque ſolidum abs D plano in $\overline{\text{E} - \text{B}}$, multatum $\overline{\text{E} - \text{B}}$ cubo, æquatur Z ſolido. Solidum autem abs D plano in $\overline{\text{E} - \text{B}}$ conſtat, D plano in E, — D plano in B. Cubus vero ablatitius, — E cubo + B in E quad. 3 — B quad. in E 3 + B cubo. Quare omnibus bene ordinatis, $\overline{\text{D planum} - \text{B quad. } 3}$. in E, + B in E quad. 3 — E cubo, æquabitur Z ſolido + D plano in B — B cubo. ut eſt enunciatum.

THEOREMA VIII.

SI D planum in A — A cubo, æquetur Z ſolido. A — B eſto E. $\overline{\text{D planum} - \text{B quad. } 3}$ in E — B in E quad. 3 — E cubo, æquabitur Z ſolido — D plano in B + B cubo.

Quoniam enim D planum in A — A cubo, æquatur Z ſolido: eſt autem A — B radici E æqualis, igitur E + B æquabitur A. Itaque ſolidum abs D plano in $\overline{\text{E} + \text{B}}$ multatum $\overline{\text{E} + \text{B}}$ cubo, æquabitur Z ſolido. Solidum autem abs D plano in $\overline{\text{E} + \text{B}}$ conſtat, D plano in E + D plano in B. Cubus vero ablatitius, — E cubo — B in E quad. 3. — B quad. in E 3 — B cubo. Quare omnibus bene ordinatis, $\overline{\text{D planum} - \text{B quad. } 3}$ in E — B in E quad. 3 — E cubo, æquabitur Z ſolido — D plano in B + B cubo. ut eſt enunciatum.

Descartes

C'est avec René DESCARTES (1596-1650) qu'apparait une notation très proche de la notation actuelle : $a, b, c \ldots$ désignent les quantités connues, $x, y, z \ldots$ les inconnues ; les puissances sont notées comme maintenant. Deux exceptions : il utilise xx plutôt que x^2, et le signe $\propto$ pour l'égalité.

Descartes est un homme universel : philosophie, physique (optique en particulier), cosmologie, mécanique... et mathématiques. Son travail en algèbre est essentiellement contenu dans le livre III de *la Géométrie* (1637), qui est elle-même l'un des 3 appendices du célèbre Discours de la Méthode.

Un passage de *la Géométrie*

oubien $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$.
où la vraye racine qui estoit 5 est maintenant 8, a cause du nombre trois qui luy est aiousté.

Que si on veut au contraire diminuer de trois la racine de cete mesme Equation, il faut faire $y + 3 \propto x$ & $yy + 6y + 9 \propto xx$. & ainsi des autres de façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$$

on met

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 \\
 & - 19yy & - 114y & - 171 \\
 & & - 106y & - 318 \\
 & & & - 120 \\
\hline
\end{array}$$

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0.$$

Descartes (suite)

Descartes est le premier à écrire explicitement qu'un polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$.

Plus généralement, il développe l'idée de réduire la complexité d'une équation $P = 0$ en décomposant P comme produit de polynômes. Il obtient ainsi entre autres une nouvelle méthode pour l'équation du 4$^{\text{ème}}$ degré.

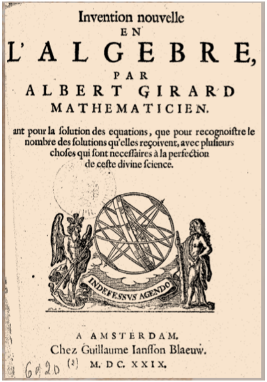
Il explique d'abord en détail qu'une translation sur x permet de réduire l'étude d'une équation de degré n au cas où le coefficient de x^{n-1} est nul. Il considère alors le polynôme $x^4 + px^2 + qx + r$, qu'il propose de factoriser en produit de polynômes du second degré :

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$$

En développant, on obtient b et c en fonction de a, puis une équation du 3$^{\text{ème}}$ degré en a^2.

Le nombre de racines d'une équation

L'idée qu'une équation du 3ème degré peut avoir 3 solutions n'apparait pas chez les italiens.



Le premier à énoncer qu'une équation de degré n a n racines est Albert Girard (1595–1632), un mathématicien né en France mais émigré en Hollande, dans *L'invention en algèbre* (1629). Mais il lui faut admettre des racines "impossibles", et ce qu'il entend par là n'est pas clair. Néanmoins il énonce les relations entre les coefficients d'une équation et les polynômes symétriques des racines, qu'il appelle "factions".

Le nombre de racines d'une équation

Descartes donne un énoncé du même type :

« Au reste tant les vraies racines (= positives) que les fausses (= négatives) ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine ».

Il indique aussi (sans démonstration) une méthode pour estimer le nombre des racines *positives* ("vraies") d'une équation (*règle des signes de Descartes*).

Après 1650 l'idée qu'une équation de degré n a n racines "imaginaires" (comptées avec multiplicité) est largement admise, même si la définition d'"imaginaire" reste très imprécise.

Le théorème fondamental de l'algèbre

Au cours du 18ème siècle la notion de "racine imaginaire" sous forme de nombre complexe (écrit $a + \sqrt{-b}$), se précise peu à peu, ainsi que l'idée qu'à condition d'admettre ces nombres tout polynôme se décompose en un produit de facteurs du 1er degré (**théorème fondamental de l'algèbre**, souvent appelé théorème de d'Alembert-Gauss).

Jean D'ALEMBERT (1717–1783) est surtout connu des mathématiciens pour ses travaux en mécanique, et du reste du monde pour l'énorme travail que représente l'*Encyclopédie*, dont il a été avec Diderot l'un des principaux contributeurs.

Le théorème fondamental de l'algèbre

En 1746 d'Alembert propose une démonstration ; basée sur l'analyse, elle comporte de grosses lacunes.

Vient ensuite Leonhard Euler (1707- 1783), le plus grand mathématicien du $18^{\text{ème}}$ siècle. Après des études à Bâle, il a fait toute sa carrière à l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg, avec un intermède de 15 ans à celle de Berlin. Ses contributions essentielles sont en analyse, en géométrie, en théorie des nombres, en mécanique.

Il propose en 1749 une démonstration algébrique, dans l'esprit de la résolution par Descartes de l'équation du $4^{\text{ème}}$ degré, mais ce n'est qu'une esquisse très insuffisante.

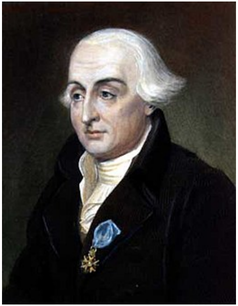
Le théorème fondamental de l'algèbre

Lagrange donne une preuve complète en 1772, mais en admettant, comme il était d'usage, l'existence de n racines "imaginaires".

Dans sa thèse (1799), Gauss critique les démonstrations de ses prédécesseurs, puis donne lui-même une démonstration géométrique assez obscure et d'une rigueur laissant à désirer. Il y revient en 1816 avec deux démonstrations tout-à-fait inattaquables.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) est physicien et astronome au moins autant que mathématicien. Il a fait toute sa carrière à Göttingen comme directeur de l'Observatoire. Il a néanmoins obtenu des résultats de premier ordre en théorie des nombres, géométrie différentielle, équations différentielles, ...

Lagrange



Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) est né à Turin et y a fait ses études, d'ailleurs peu avancées – il est assez largement autodidacte. Il commence une correspondance avec Euler qui est impressionné par ce jeune garçon ; à 20 ans il est élu membre de l'Académie des Sciences de Berlin, et il en devient directeur pour les Mathématiques à 30 ans. Il y reste 20 ans, puis accepte un poste prestigieux à l'Académie des Sciences de Paris. Dans les années 1795 il enseigne à l'École Polytechnique et à l'École Normale Supérieure, nouvellement créées. Il termine sa vie dans les honneurs : comte d'Empire, légion d'honneur...

Lagrange

En 1770 Lagrange publie ses *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. Il décrit son objet comme suit :

« Je me propose dans ce Mémoire d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux, et de faire voir *a priori* pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré, et sont en défaut pour les degrés ultérieurs ».

L'idée de Lagrange est de considérer les **permutations** des racines. Prenons l'exemple d'une équation du 4ème degré, qui admet 4 racines $x_1, \ldots, x_4$. Lagrange forme l'expression $x_1x_2 + x_3x_4$, et remarque qu'elle ne prend que **trois** valeurs quand on permute les x_i de toutes les façons possibles. Il en résulte que ces 3 valeurs sont les racines d'une équation du 3ème degré, qu'on sait résoudre ; il est facile d'en déduire les x_i.

Abel

Lagrange montre ensuite que cette méthode ne peut pas s'appliquer en degré $\geqslant 5$ – mais cela ne prouve pas qu'il n'en existe pas d'autre. C'est Abel qui va y parvenir.

Niels Abel (1802-1829) vient d'une famille peu fortunée de Norvège – toute sa vie sera une lutte contre la pauvreté. Un jeune professeur de mathématiques de son lycée, Holmboe, découvre ses dons et convainc ses collègues de se cotiser pour lui payer l'Université.

Le travail sur les équations de degré $\geqslant 5$ est le premier "grand" résultat d'Abel ; il le fait publier lui-même à ses frais, et du coup en réduit la taille au maximum : 6 pages !

Abel

Après ce coup d'éclat Abel obtient des résultats encore plus profonds, sur ce qu'on appelle maintenant les *intégrales abéliennes*. De 1825 à 1827, Abel voyage entre la France et l'Allemagne en essayant de faire connaitre ses travaux, sans guère de succès : Cauchy égare le manuscrit. Il y épuise sa santé et le peu d'argent qui lui reste. Il doit rentrer en Norvège, où il meurt en 1829. Quelques jours après arrive une lettre de Berlin lui proposant un poste de Professeur à l'Université.

Ainsi l'équation **générale** de degré $\geqslant 5$ n'est pas résoluble par radicaux ; mais Gauss et Abel lui-même avaient donné d'importants exemples d'équations particulières qui le sont. Il devenait donc très naturel de chercher à caractériser les équations résolubles par radicaux. On sait qu'Abel y travaillait peu avant sa mort ; mais c'est Galois qui devait résoudre définitivement le problème.

Galois

Évariste Galois (1811-1832) est né à Bourg-la-Reine dans une famille bourgeoise et républicaine (son père est élu maire de Bourg-la-Reine en 1815). Il entre à Louis-le-Grand, puis à l'École Normale, où il rédige son mémoire *Conditions pour qu'une équation soit résoluble par radicaux* afin de concourir au grand prix de mathématiques de l'Académie des Sciences. Fourier emporte le manuscrit chez lui et meurt peu après : le manuscrit est perdu, et le grand prix est décerné à Abel (mort l'année précédente) et à Jacobi. Galois va être tué en duel en 1832. La nuit précédente il écrit la fameuse *lettre à Auguste Chevalier*, où il résume ses derniers travaux.

Galois

Le travail de Galois sur les équations est d'abord mal accueilli : les rapporteurs de l'Académie des Sciences affirment que le Mémoire est "à peu près inintelligible". Ce n'est qu'en 1846 que Liouville le publie dans son journal, en insistant sur sa valeur.

Après cette publication, les travaux de Galois sont étudiés en profondeur, et leur importance est universellement reconnue ; en particulier le "*Traité des substitutions et des équations algébriques*" de Jordan (1870) développe la théorie de Galois pratiquement jusqu'au point où elle est actuellement.

On peut considérer que l'histoire des équations algébriques s'arrête là ; par contre la théorie de Galois reste très présente dans les mathématiques actuelles, par exemple dans le *programme de Langlands*, un vaste ensemble de conjectures dans lequel le groupe de Galois joue un rôle essentiel.