Le problème de Lüroth

Arnaud Beauville

Université Côte d'Azur

Chambéry, avril 2017

Lüroth 1875

Théorème (Lüroth, 1875)

C courbe plane, définie par un polynôme $f(x,y)=0$, qui peut être paramétrée par des fonctions rationnelles :

$$t \mapsto (x(t),y(t)) \;:\; f(x(t),y(t))=0\ .$$

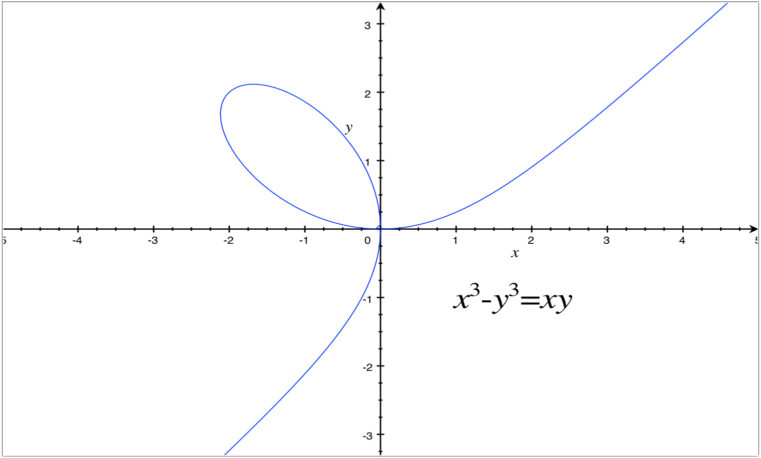
$\Longrightarrow$ *il existe un autre paramétrage $u \mapsto (x(u),y(u))$ tel que $u \in \mathbb{C} \xleftrightarrow{1:1} (x,y) \in C$, avec un nombre fini d'exceptions.*

En termes géométriques :

$\exists$ application rationnelle dominante $\mathbb{C} \dashrightarrow C \;:\; t \mapsto (x(t),y(t))$

$\Longrightarrow$ $\exists$ application **birationnelle** $\mathbb{C} \overset{\sim}{\dashrightarrow} C$.

Un exemple



Strophoïde : paramétrée par $x(t) = \dfrac{t}{1-t^3}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{1-t^3}$.

À propos de la preuve

Lüroth donne une démonstration algébrique, astucieuse mais assez mystérieuse (devenue aujourd'hui un grand classique des préparations à l'agrégation).

Démonstration "moderne" : $C_{reg} \subset \overline{C}$ surface de Riemann compacte.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & C_{reg} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{f} & \bar{C} \end{array}$$

Riemann : $\bar{C} \cong \mathbb{P}^1 \iff$ toute forme holomorphe ω sur $\bar{C}$ est nulle.

Or : $f^*\omega$ forme holo. sur $\mathbb{P}^1 \Rightarrow f^*\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow \bar{C} \cong \mathbb{P}^1$. ■

Castelnuovo-Enriques

Dans la décade 1890-1900, Castelnuovo et Enriques développent la théorie des surfaces algébriques.

Partant d'un stade assez primitif, ils obtiennent en quelques années une riche moisson de résultats, culminant avec une classification élaborée – ce qu'on appelle maintenant la classification d'Enriques.

Le théorème de Castelnuovo

Une des premières questions que Castelnuovo attaque est l'analogue du théorème de Lüroth pour les surfaces :

Théorème (Castelnuovo, 1893)

S surface algébrique, $\exists\ \mathbb{C}^2 \dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow S \implies \exists\ \mathbb{C}^2 \overset{\sim}{\dashrightarrow} S$.

ou : $$S \text{ unirationnelle} \implies S \text{ rationnelle} .$$

Castelnuovo observe :

$$S \text{ unirationnelle} \;\Rightarrow\; S \text{ n'a pas de 1- ou 2-forme} \neq 0$$

$$(\text{localement, } p(x,y)dx + q(x,y)dy \quad \text{ou} \quad r(x,y)dx \wedge dy).$$

[*Note :* En fait Castelnuovo utilise une formulation équivalente, l'annulation des genres "géometrique" et "numérique".]

La surface d'Enriques

Il essaie d'abord de prouver que cette propriété caractérise les surfaces rationnelles, mais ne parvient pas à éliminer un type très particulier de surface. Il demande à Enriques, qui lui montre qu'une telle surface peut existter :

" *Guarda un po' se fosse tale una superficie del* 6^{o} *ordine avente como doppi i* 6 *spigoli d'un tetraedro (se esiste) ?* "

Ces surfaces, appelées maintenant **surfaces d'Enriques**, jouent un rôle important dans la classification d'Enriques.

Une surface d'Enriques

Le critère de rationalité de Castelnuovo

Castelnuovo trouve alors la caractérisation correcte :

Théorème

S rationnelle $\iff$ pas de 1-forme, et pas de 2-forme quadratique ($localement = f(x,y)\,(dx \wedge dy)^2$).

Une surface unirationnelle a cette propriété, donc est rationnelle.

Ce résultat est une étape importante dans la classification des surfaces ; même avec les puissantes méthodes modernes, il reste tout à fait non trivial.

Le problème de Lüroth

Définition

X variété algébrique complexe

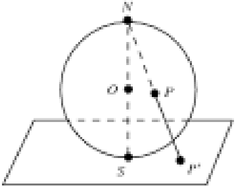
- X **unirationnelle** si $\exists\ \mathbb{C}^n \dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X$ ($\Longleftrightarrow\ \mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n)$).
- X **rationnelle** si $\exists\ \mathbb{C}^n \overset{\sim}{\dashrightarrow} X$ ($\Longleftrightarrow\ \mathbb{C}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n)$).

$$\begin{tikzcd} X \text{ rationnelle} \arrow[r, Rightarrow] & X \text{ unirationnelle} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "?"] \end{tikzcd}$$

Problème de Lüroth

Algébriquement : $\mathbb{C} \subset K \subset \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n) \overset{?}{\Longrightarrow} K \cong \mathbb{C}(u_1, \ldots, u_p)$

Oui pour les courbes (Lüroth) et les surfaces (Castelnuovo).



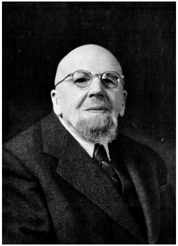
- Une quadrique $Q(X_0, \ldots, X_n) = 0$ dans $\mathbb{P}^n$ est toujours rationnelle (projection stéréographique).

- Une cubique lisse $F(X_0, \ldots, X_n) = 0$ dans $\mathbb{P}^n$ ($\deg(F) = 3$, $n \geqslant 3$) est unirationnelle. Est-elle rationnelle ? ? ?

Dimension > 2

En 1912, Enriques affirme donner un contre-exemple en dimension 3 : une intersection complète lisse d'une quadrique et d'une cubique $V_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$.

Il démontre en fait qu'elle est unirationnelle, et fait appel à un article de Fano (1908) pour la non-rationalité.



Mais l'analyse de Fano est incomplète. La géométrie en dimension 3 est beaucoup plus compliquée que celle des surfaces ; les méthodes intuitives des géomètres italiens sont insuffisantes.

Doutes

Fano fait d'autres tentatives (1915, 1947) ; dans la dernière il affirme la non-rationalité (conjecturée depuis longtemps) de l'hypersurface cubique lisse $V_3 \subset \mathbb{P}^4$.

Mais aucune de ces preuves n'est acceptable aujourd'hui.

Une critique détaillée des tentatives de Fano parait dans le livre *Algebraic threefolds, with special regard to problems of rationality* (1955), du mathématicien anglais Leonard Roth, qui conclut qu'aucune d'elles ne peut être considérée comme correcte.

Encore des doutes ...

Roth continue en donnant un contre-exemple de son cru, en imitant en dimension 3 la construction originale de la surface d'Enriques.

Il montre qu'elle est unirationnelle, et pas simplement connexe – donc non rationnelle, car une variété (lisse, projective) rationnelle est simplement connexe.

Hélas, 4 ans plus tard, Serre prouve qu'une variété *unirationnelle* est simplement connexe. L'exemple de Roth aussi était incorrect ...

L'ère moderne

À partir des années 50, les nouvelles méthodes (faisceaux, cohomologie...) révolutionnent la géométrie algébrique.

Le développement est d'abord très abstrait, et orienté vers les aspects arithmétiques ; mais il apparait progressivement un courant qui utilise ces méthodes pour revisiter les problèmes classiques, particulièrement aux États-Unis et en Union soviétique.

En 1971 apparaissent presque simultanément 3 exemples indiscutables de variétés unirationnelles non rationnelles :

Les 3 contre-exemples

Auteurs	Exemple	Méthode
Clemens-Griffiths	$V_3 \subset \mathbb{P}^4$	JV (théorie de Hodge)
Iskovskikh-Manin	certaines $V_4 \subset \mathbb{P}^4$	$\mathrm{Bir}(V)$ (idée de Fano)
Artin-Mumford	spécifique	Tors $H^3(V, \mathbb{Z})$

Commentaires

- Les 3 articles ont eu une influence considérable : leurs méthodes ont été appliquées à beaucoup d'autres exemples.
- Sauf pour une idée nouvelle de Kollár (1995), ce sont essentiellement les seules méthodes connues pour prouver la non-rationalité.
- Les 3 méthodes sont très différentes, et s'appliquent à des classes différentes de variétés.
- À l'époque les 3 preuves utilisaient la résolution des singularités de Hironaka, hors de portée des géomètres italiens.
- Seule la méthode d'Artin-Mumford donne des exemples en dimension > 3 ; ils sont de la forme $V \times \mathbb{C}^n$, où V est une variété très particulière de dimension 3.

  Par contre les 2 premières donnent beaucoup d'exemples **en dimension 3**.

Intersections complètes

Par exemple, parmi les intersections complètes sans 3-formes holo. :

Variété	Unirationnelle	Rationnelle	Méthode
$V_3 \subset \mathbb{P}^4$	oui	non	JV
$V_4 \subset \mathbb{P}^4$	certaines	non	$\mathrm{Bir}(V)$
$V_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$	oui	oui	
$V_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$	oui	non (générique)	$JV, \mathrm{Bir}(V)$
$V_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$	oui	non	JV

Ainsi la plupart sont unirationnelles, non rationnelles.

La jacobienne intermédiaire

Depuis Riemann on associe à une courbe (= surface de Riemann compacte) de genre g sa **jacobienne** (JC, Θ).

C'est une **variété abélienne principalement polarisée** (v.a.p.p.), c'est-à-dire un tore complexe $JC = \mathbb{C}^g/\Gamma$ avec une forme alternée unimodulaire $E : \ \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ telle que la forme $E_\mathbb{R}$ sur $\Gamma_\mathbb{R} = \mathbb{C}^g$ vérifie $E(ix, iy) = E(x, y)$ et $E(x, ix) > 0$ pour $x \neq 0$.

Cette forme permet de définir la *fonction thêta de Riemann*, qui s'annule le long d'une hypersurface $\Theta \subset JC$, bien définie à translation près ; inversement Θ determine E.

La jacobienne est un outil fondamental dans l'étude des courbes algébriques.

Le critère de Clemens-Griffiths

De la même façon, la théorie de Hodge associe à toute variété X de dimension 3 sans forme holomorphe une v.a.p.p. (JX, Θ), la **jacobienne intermédiaire** de X.

Le critère de Clemens-Griffiths

Si X est rationnelle, $(JX, \Theta) \cong (JC, \Theta)$ pour une courbe C.

Cela ramène à une autre question très classique, le **problème de Schottky** : comment distinguer les jacobiennes parmi toutes les v.a.p.p. ?

$\big[$les v.a.p.p. de dimension g forment une variété de dimension $\frac{1}{2}g(g+1)$, alors que les jacobiennes forment une sous-variété de dimension $3g-3\,.\big]$

Fibrés en coniques

Le critère le plus utilisé remonte à Riemann : **pour une jacobienne (JC, Θ), dim Sing$(\Theta) \geqslant g - 4$.**

Mais il n'est pas facile de contrôler $\mathrm{Sing}(\Theta)$ pour JX ...

Une exception : quand X est un **fibré en coniques**, i.e. $\exists\ X \to \mathbb{P}^2$ à fibres $\mathbb{P}^1$ ou $\mathbb{P}^1 \cup_p \mathbb{P}^1$. Alors (JX, Θ) est une **variété de Prym**, un type particulier de v.a.p.p. qui est mieux compris. Par exemple :

Théorème

$X \subset \mathbb{P}^4$ cubique lisse. Alors dim $JX = 5$, $\mathrm{Sing}(\Theta) = \{p\}$, *de sorte que X n'est pas rationnelle.*

Dans la liste précédente, V_3 et $V_{2,2,2}$ sont des fibrés en coniques, donc non rationnels. Les autres (V_4, $V_{2,3}$) peuvent être dégénérés sur des fibrés en coniques, ce qui permet de prouver qu'ils sont *génériquement* non rationnels.

Rigidité birationnelle

La méthode d'Iskovskikh-Manin (inspirée de Fano) prouve :

Théorème

$V_4 \subset \mathbb{P}^4$ quartique lisse. Toute application birationnelle $V_4 \dashrightarrow V_4$ est un automorphisme : $\mathrm{Bir}(V_4) = \mathrm{Aut}(V_4)$.

En particulier $\mathrm{Bir}(V_4)$ est un groupe fini, tandis que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ est énorme – donc V_4 n'est pas rationnelle.

Depuis cette propriété (*rigidité birationnelle*) a été prouvée pour un certain nombre de variétés, en particulier toute $V_n \subset \mathbb{P}^n$ lisse (de Fernex, 2013). Mais : pas d'exemple unirationnel en dimension $\geqslant 4$.

Le problème de Lüroth stable

L'abondance de variétés unirationnelles, non rationnelles conduit à regarder une notion intermédiaire :

X **stablement rationnelle** si $X \times \mathbb{P}^m$ rationnelle pour $m \gg 0$

(Zariski, 1949) $\iff$ $\mathbb{C}(X)(t_1, \ldots, t_m)/\mathbb{C}$ purement transcendente.

$$\begin{tikzcd}
\text{rationnel} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{unirationnel} \arrow[dl, Rightarrow, bend left, "2"] \\
& \text{stablement rationnel} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow, bend left, "1"] &
\end{tikzcd}$$

question 1 posée par Zariski (1949) ; contre-exemple par Colliot-Thélène, Sansuc, Swinnerton-Dyer, AB (1985), utilisant JX.

L'exemple d'Artin-Mumford

(2) : unirationnel $\Rightarrow$ stablement rationnel ? **Non :** Artin-Mumford.

Ils démontrent : X stablement rationnel $\implies$ Tors $H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$,

et construisent une variété unirationnelle X avec $H^3(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$.

Leur exemple est un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une surface quartique très particulière, admettant 10 points doubles ordinaires (*symétroïde quartique*) :

$$u^2 = \Delta(x, y, z, t) \quad \text{avec } \Delta = \det(L_{ij}),$$

(L_{ij}) matrice symétrique 4×4 de formes linéaires sur $\mathbb{P}^3$.

Jusqu'il y a 2 ans on avait très peu d'exemples de telles variétés (unirationnelles mais pas stablement rationnelles).

Nouveaux résultats

La situation a changé spectaculairement avec une idée nouvelle de Claire Voisin :

Théorème (Voisin, 2015)

Un revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une surface quartique générale n'est pas stablement rationnel.

- général := en dehors d'une réunion dénombrable de sous-variétés strictes de l'espace des paramètres.
- Unirationalité et non-rationalité déjà connues (AB 77, Voisin 86)

Autres résultats

Des raffinements de la méthode de Voisin donnent la non-rationalité stable d'une variété générale de type :

1. $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ (Colliot-Thélène-Pirutka).
2. Double $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une sextique (AB).
3. $V_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ pour $d \geqslant 2\left\lceil \dfrac{n+2}{3} \right\rceil$ (Totaro) ; e.g. $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ ou $\mathbb{P}^5$, $V_6 \subset \mathbb{P}^6, \mathbb{P}^7, \mathbb{P}^8$, etc.
4. La plupart des fibrés en coniques (Hassett-Kresch-Tschinkel).
5. $V_{2,3}$, $V_{2,2,2}$, et beaucoup d'autres (Hassett-Tschinkel).
6. ... mais pas la cubique $V_3 \subset \mathbb{P}^4$.

Déformations

La conséquence la plus spectaculaire :

Théorème (Hassett-Pirutka-Tschinkel, 2016)

Il existe une famille de variétés lisses projectives $(V_b)_{b\in B}$*, de dimension 4, telle que :*

1. *Pour b général,* V_b *n'est pas rationnelle (pas même stablement rationnelle) ;*
2. *Il existe un sous-ensemble dense* $B_{rat} \subset B$ *tel que* V_b *est rationnelle pour* $b \in B_{rat}$*.*

(L'existence d'une famille de variétés contenant à la fois des variétés rationnelles et non rationnelles n'était pas connue, et ne l'est toujours pas en dimension 3.)

L'argument de spécialisation

Idée : spécialiser une surface quartique générale en un symétroïde.

$(S_b)_{b\in B}$ = famille des $V_4 \subset \mathbb{P}^3$ $\rightsquigarrow$ famille $(X_b)_{b\in B}$, avec

$X_b :=$ revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long de S_b.

$\mathrm{o} \in B$, S_{o} symétroïde. X_{o} a 10 points doubles ordinaires ;

$\tilde{X} :=$ désingularisation de X_{o} a $\mathrm{Tors}\, H^3(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Proposition (Voisin)

$(X_b)_{b\in B}$ famille de variétés projectives, $\mathrm{o} \in B$. On suppose :

- (i) X_{o} a seulement des points doubles ordinaires ;
- (ii) Une désingularisation $\tilde{X}$ de X_{o} satisfait $\mathrm{Tors}\, H^3(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Alors X_b n'est pas stablement rationnelle pour b général.

(ne résulte pas d'Artin-Mumford : $\mathrm{Tors}\, H^3(X_b, \mathbb{Z}) = 0$ si S_b lisse.)

Décomposition de la diagonale

Ingrédient clé : pour V lisse projective, propriété intermédiaire DD_V ("décomposition de la diagonale") telle que :

1. V stablement rationnelle $\Rightarrow$ DD_V $\Rightarrow$ Tors $H^3(V,\mathbb{Z})=0$;
2. Dans une famille $(X_b)_{b\in B}$ comme ci-dessus,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \text{ ne vérifie pas } \mathrm{DD} & \Longrightarrow & X_b \text{ ne vérifie pas } \mathrm{DD} \text{ pour } b \text{ général.} \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ \text{Alors : Tors } H^3(\tilde{X},\mathbb{Z})\neq 0 & & X_b \text{ non stablement rationnelle.} \end{array}$$

Propriété DD_V :

Une décomposition de la diagonale est une égalité dans $H^*(V\times V,\mathbb{Z})$:

$$\Delta_V = V\times\{\mathrm{pt}\}+\sum n_i Z_i\ . \qquad (\mathrm{DD}_V)$$

avec $\Delta_V\subset V\times V$ diagonale, et $\mathrm{pr}_1(Z_i)\subsetneq V$.

Le mystère de l'hypersurface cubique

- **Conjecture** : $V_3 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ générale n'est pas rationnelle ($n \geqslant 3$).
- On connait des exemples de cubiques rationnelles pour n pair ; pas d'exemple connu avec n impair.
- Les exemples connus en dimension 4 : dans l'espace des modules,
  - L'hypersurface des cubiques définies par $\mathrm{Pf}(L) = 0$, où L est une matrice 6×6 antisymétrique de formes linéaires (Fano).
  - Un sous-ensemble dense de l'hypersurface des cubiques contenant un plan (Hassett).
  - Un sous-ensemble dense de l'hypersurface des cubiques contenant un certain type de surface réglée (A-H-T-VA).
- **Rationalité stable** : rien n'est connu, même en dimension 3.

(Voisin : certaines $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ admettent une décomposition de la diagonale.)

Conclusion

Conclusion : Nous ne connaissons qu'une toute petite partie émergée de l'iceberg... Beaucoup de beaux problèmes ouverts.