Vol. 55, No. 4 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © December 1987

SECTIONS HYPERPLANES DES SURFACES $K3$

A. BEAUVILLE ET J.-Y. MÉRINDOL

Introduction. Cette note est un commentaire sur un théorème de J. Wahl [W]. Pour toute variété X et tout fibré en droites L sur X, on définit un homomorphisme φ_L: $\Lambda^2 H^0(X, L) \to H^0(X, \Omega^1_X \otimes L^{\otimes 2})$ en donnant un sens à la formule $\varphi_L(s \wedge t) = s\,dt - t\,ds$ (cf. §2). Wahl démontre alors que *si C est une section hyperplane lisse d'une surface $K3$, l'homomorphisme φ_K: $\Lambda^2 H^0(C, \omega_C) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes 3})$ n'est pas surjectif*. Il est facile de donner des exemples explicites de courbes pour lesquelles φ_K est surjectif, et qui ne peuvent donc être réalisées comme sections hyperplanes de surfaces $K3$: les intersections complètes dans $\mathbb{P}^n$, sauf un petit nombre d'exceptions, sont dans ce cas [W].

La méthode de Wahl s'appuie sur la théorie des déformations de singularités isolées, appliquée au cône sur une courbe canonique. Nous proposons dans cette note une approche tout-à-fait différente. Si C est une section hyperplane d'une surface $K3\,S$, nous démontrons que *la surjectivité de φ_K entraîne que la suite exacte*

$$0 \to T_C \to T_S|_C \to N_{C/S} \to 0$$

est scindée. Nous prouvons d'autre part que cette propriété de scindage implique l'existence d'une *involution de S dont le lieu fixe est C*. Il est alors facile de conclure à une contradiction.

Nous considérons des variétés définies sur un corps algébriquement clos k, de caractéristique $\neq 2$.

§1. Scindage de la suite normale. Dans ce paragraphe, nous considérons la question suivante. Soit C une courbe projective et lisse contenue dans une surface projective S; nous supposons S lisse au voisinage de C. On dispose dès lors d'une suite exacte canonique

$$0 \to T_C \to T_S|_C \to N_{C/S} \to 0,$$

que nous appellerons *suite normale* de C dans S. Nous voulons étudier à quelle condition cette suite est scindée.

Cette question s'interprète naturellement en termes d'espaces de modules:

PROPOSITION 1. *Considérons les conditions suivantes*:

(i) *la suite normale de C dans S est scindée*;

Received August 10, 1986.

(ii) *toute déformation au premier ordre de C dans S est triviale en tant que déformation de C.*
On a alors (i) $\Rightarrow$ (ii); *si l'application naturelle*

$$H^0(C, N_{C/S}) \otimes H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) \to H^0(C, N_{C/S} \otimes \omega_C^{\otimes 2})$$

est surjective, les conditions (i) *et* (ii) *sont équivalentes.*

L'espace $H^0(C, N_{C/S})$ (resp. $H^1(C, T_C)$) est l'espace des déformations au premier ordre de C dans S (resp. de C), et le cobord ∂: $H^0(C, N_{C/S}) \to H^1(C, T_C)$ est l'application oubli du plongement. Si la suite normale est scindée, ∂ est nul, d'où l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Le reste de la proposition résulte du lemme élémentaire suivant:

LEMME 1. *Soit C une courbe projective et lisse, et soit*

$$(*) \qquad 0 \to E \to F \to G \to 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels sur C. Si le cobord ∂: $H^0(C, G) \to H^1(C, E)$ *est nul, et si l'accouplement* α: $H^0(C, G) \otimes H^0(C, E^* \otimes \omega_C) \to H^0(C, G \otimes E^* \otimes \omega_C)$ *est surjectif, la suite exacte* $(*)$ *est scindée.*

Soit $e \in H^1(C, G^* \otimes E)$ la classe de l'extension $(*)$. Le cobord ∂: $H^0(C, G) \to H^1(C, E)$ coïncide (au signe près!) avec le cup-produit par e. Par dualité de Serre, e s'identifie à une forme linéaire sur $H^0(C, G \otimes E^* \otimes \omega_C)$, et la nullité de ∂ équivaut à celle de l'homomorphisme composé

$$H^0(C, G) \otimes H^0(C, E^* \otimes \omega_C) \xrightarrow{\alpha} H^0(C, G \otimes E^* \otimes \omega_C) \xrightarrow{e} k.$$

Si α est surjectif on en déduit $e = 0$, d'où le lemme.

Remarque 1. La condition de la prop. 1 est le plus souvent réalisée. On déduit en effet facilement du "base-point free pencil trick" que si L et M sont des fibrés en droites sur C, tels que $|L|$ soit sans point base et qu'on ait $H^1(C, M \otimes L^{-1}) = 0$, alors l'accouplement $H^0(C, L) \otimes H^0(C, M) \to H^0(C, L \otimes M)$ est surjectif (cf. [M, Thm. 2] pour un énoncé beaucoup plus général). On en conclut que si le système $|C|$ sur S est sans point base et si $K_S \cdot C > 0$, l'homomorphisme $H^0(C, N_{C/S}) \otimes H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) \to H^0(C, N_{C/S} \otimes \omega_C^{\otimes 2})$ est surjectif. D'autre part, cette condition est aussi réalisée lorsque K_S est trivial et $g(C) \neq 2$ (on a alors $N_{C/S} = \omega_C$).

Voici deux situations simples où la suite normale est scindée.

(1) Supposons S plongée dans $\mathbb{P}^n$, de façon que C soit découpée sur S par un hyperplan H. Supposons de plus qu'il existe un point p de $\mathbb{P}^n$, non situé sur H, tel que *le plan tangent à S en tout point de C passe par p*. Alors la suite normale de

C dans S est scindée. En effet, pour tout point x de C, la droite $\langle p, x\rangle$ fournit un sous-espace de dimension 1 de $T_x(S)$, transverse à $T_x(C)$; la réunion de ces sous-espaces est un sous-fibré de $T_S|_C$, supplémentaire de T_C.

(2) S'il existe une involution non triviale σ de S fixant les points de C, la suite normale est scindée. En effet σ opère sur $T_S|_C$; ce fibré se décompose en somme directe de deux sous-fibrés T^+ et T^-, correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1 de σ, et on a $T^+ = T_C$, d'où notre assertion.

Nous allons voir que, moyennant des hypothèses convenables, le scindage de la suite normale entraîne l'une des deux conditions précédentes.

PROPOSITION 2. *Soient S une surface projective dans $\mathbb{P}^n$, non contenue dans un hyperplan, et H un hyperplan de $\mathbb{P}^n$ découpant sur S une courbe lisse C. On fait l'hypothèse*

(C1) *l'application naturelle $H^0(C, \omega_C) \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(C, \omega_C(1))$ est surjective.*

Si la suite normale de C dans S est scindée, il existe alors un point p de $\mathbb{P}^n$, non situé sur H, tel que le plan tangent à S en tout point de C passe par p.

Si la suite normale est scindée, il existe un homomorphisme non nul $i\colon \mathcal{O}_C(1) \to T_S|_C$. Via la suite exacte

$$0 \to T_S(-1)|_C \to T_{\mathbb{P}^n}(-1)|_C \xrightarrow{u} N_{S/\mathbb{P}^n}(-1)|_C \to 0,$$

on déduit de i une section non nulle s de $H^0(C, T_{\mathbb{P}^n}(-1)|_C)$ telle que $u(s) = 0$. Considérons alors la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_C(-1) \xrightarrow{a} \mathcal{O}_C^{n+1} \to T_{\mathbb{P}^n}(-1)|_C \to 0.$$

L'homomorphisme $H^1(a)$ est *injectif*: par dualité, cela équivaut exactement à l'hypothèse (C1). Par suite l'homomorphisme de restriction

$$H^0(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n}(-1)) \to H^0(C, T_{\mathbb{P}^n}(-1)|_C)$$

est bijectif, et il existe un système de coordonnées homogènes $(X_0, \ldots, X_n)$ sur $\mathbb{P}^n$ tel que s soit la restriction à C du champ de vecteurs $\partial/\partial X_0$. Dire que $u(s)$ est nulle signifie que pour tout polynôme homogène $F(X_0, \ldots, X_n)$ s'annulant sur S, la dérivée $\partial F/\partial X_0$ s'annule sur C; géométriquement, cela revient à dire que pour toute hypersurface Z contenant S et tout point x de C, l'hyperplan tangent à Z en x passe par le point $p = (1, 0, \ldots, 0)$. Par suite le plan tangent à S en x passe par p. Puisque H est transverse à S, ce plan coupe H suivant la tangente à C en x; si p appartenait à H, toutes les tangentes de C passeraient par p, ce qui est impossible [H, ch. IV, thm. 3.9].

COROLLAIRE 1. *Soit σ l'involution de $\mathbb{P}^n$ dont les sous-espaces fixes sont H et $\{p\}$. Alors toute quadrique de $\mathbb{P}^n$ contenant S est stable par σ. Si une telle quadrique passe par p, elle est singulière en p.*

Notons V l'espace vectoriel dont $\mathbb{P}^n$ est l'espace des droites, $\tilde{H}$ et $\tilde{p}$ les sous-espaces de V correspondant à H et p respectivement, et $\tilde{\sigma}$ la symétrie de V égale à $+\mathrm{Id}$ sur $\tilde{H}$ et à $-\mathrm{Id}$ sur $\tilde{p}$. Soit Q une quadrique contenant S, correspondant à une forme quadratique $\tilde{Q}$ sur V. La conclusion de la prop. 2 entraîne que le polaire de p par rapport à Q contient C, donc H; autrement dit $\tilde{p}$ et $\tilde{H}$ sont orthogonaux pour $\tilde{Q}$. Cela implique que $\tilde{\sigma}$ respecte $\tilde{Q}$, donc que σ préserve Q. Si $p \in Q$, la droite $\tilde{p}$ est orthogonale à $\tilde{p}$ et à $\tilde{H}$, donc à V, ce qui signifie que p est un point singulier de Q.

COROLLAIRE 2. *Sous les hypothèses de la prop.* 2, *on suppose de plus que S n'est pas un cône et qu'elle vérifie*

(C2) *S est (ensemblistement) intersection de quadriques dans $\mathbb{P}^n$.*

Il existe alors une involution de S dont le lieu fixe est égal à C.

Le cor. 1 entraîne que σ préserve S. Le lieu fixe de σ dans S est C ou $C \cup \{p\}$; dans le second cas, toutes les quadriques contenant S sont singulières en p (cor. 1), et S est un cône de sommet p.

Remarques. (2) Si C est linéairement normale dans H (c'est-à-dire si l'homomorphisme de restriction $H^0(H, \mathcal{O}_H(1)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(1))$ est bijectif), la condition (C1) équivaut à

(C1′) *l'homomorphisme* $H^0(C, \omega_C) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(1)) \to H^0(C, \omega_C(1))$ *est surjectif*.

D'autre part, la condition (C2) est entraînée par la condition suivante, qui a l'avantage de ne porter que sur C:

(C2′) *l'idéal homogène de C dans H est engendré par ses éléments de degré* 2.

En effet cette condition implique la même propriété pour l'idéal de S dans $\mathbb{P}^n$, cf. [S-D, lemma 1.6].

(3) Lorsque $k = \mathbb{C}$, l'énoncé et la démonstration de la prop. 2 et des cor. 1 et 2 s'étendent immédiatement au cas où S est une variété de dimension quelconque et C une section hyperplane lisse. Mieux, *la condition* (C1) *est inutile* dès que $\dim(C) \geq 2$, puisqu'on a alors $H^1(C, \mathcal{O}_C(-1)) = 0$.

Nous allons appliquer ce qui précède à l'exemple des surfaces $K3$.

PROPOSITION 3. *Soient S une surface $K3$ plongée dans $\mathbb{P}^g$ ($g \geq 5$), et C une section hyperplane lisse de S. Si la suite normale de C dans S est scindée, il existe une involution de S dont le lieu fixe est C; on a alors $g \leq 10$.*

Observons que la condition (C1) est ici satisfaite en vertu du théorème de Noether qu'on peut appliquer puisque C n'est pas hyperelliptique [S-D].

Prouvons que S est intersection de quadriques dans $\mathbb{P}^g$. Si ce n'est pas le cas, on sait d'après [S-D] que l'intersection des quadriques contenant S est une variété

W lisse de dimension 3, admettant une unique fibration en plans projectifs $f\colon W \to \mathbb{P}^1$. L'involution σ fournie par le cor. 1 préserve W, donc aussi la fibration f; comme σ fixe l'hyperplan H de $\mathbb{P}^g$, on a $f \circ \sigma = f$. Soit P une fibre de f non contenue dans H, et ne passant pas par p; alors σ induit une involution de P dont le lieu fixe se réduit à la droite $H \cap P$, ce qui est impossible.

On déduit alors du cor. 2 une involution τ de S dont le lieu fixe est C. Posons $T = S/\tau$; notons $\pi\colon S \to T$ le morphisme canonique. On a $0 \equiv K_S \equiv \pi^* K_T + C$, d'où $\pi^* K_T \equiv -C$ (le signe $\equiv$ dénote l'équivalence linéaire). Ainsi $-K_T$ est ample, ce qui signifie, par définition, que T est une surface de Del Pezzo. On a donc $K_T^2 \leq 9$, d'où $C^2 = 2K_T^2 \leq 18$ et $g \leq 10$.

Remarque 4. On a obtenu bien sûr une information supplémentaire sur la courbe C, à savoir qu'elle peut être plongée dans une surface de Del Pezzo T de façon que $C \in |-2K_T|$. Cela entraîne que C est isomorphe à la normalisée d'une sextique plane, ou à l'intersection d'une quadrique et d'une quartique dans $\mathbb{P}^3$.

Inversement, si T est une surface de Del Pezzo et C une courbe lisse dans $|-2K_T|$, la surface S obtenue comme revêtement double de T ramifié le long de C est une surface $K3$, et la suite normale de C dans S est scindée.

§2. L'homomorphisme de Wahl et la suite normale. Soient X une variété, L un faisceau inversible sur X. Soient s, t deux sections de L sur X. Soit g un générateur de L au-dessus d'un ouvert U de X; écrivons $s|_U = ag$, $t|_U = bg$ (avec a, b dans $H^0(U, \mathcal{O}_U)$). On vérifie aussitôt que la section $(a\,db\text{-}b\,da) \otimes g^{\otimes 2}$ de $H^0(U, \Omega_U^1 \otimes L^{\otimes 2})$ ne dépend pas du choix de g. Les sections locales de $\Omega_X^1 \otimes L^{\otimes 2}$ obtenues de cette façon se recollent donc en une section globale $\varphi_L(s, t)$. On a ainsi défini un homomorphisme

$$\varphi_L\colon \Lambda^2 H^0(X, L) \to H^0\big(X, \Omega_X^1 \otimes L^{\otimes 2}\big),$$

qui est évidemment fonctoriel par rapport au couple (X, L).

Reprenons maintenant la situation du §1: soit C une courbe projective et lisse dans une surface projective S, lisse au voisinage de C. On pose $N = N_{C/S}$.

PROPOSITION 4. *Supposons que $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ soit nul, et que C vérifie la condition*

(C3) *l'homomorphisme naturel $H^0(C, \omega_C \otimes N^{\otimes 2}) \otimes H^0(C, \omega_C \otimes N^{-1}) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes 2} \otimes N)$ est surjectif.*

Alors si $\varphi_N\colon \Lambda^2 H^0(C, N) \to H^0(C, \omega_C \otimes N^{\otimes 2})$ est surjectif, la suite normale de C dans S est scindée.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^2 H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \arrow[r, "\varphi_C"] \arrow[d, "a"'] & H^0(S, \Omega_S^1(2C)) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\Lambda^2 H^0(C, N) \arrow[r, "\varphi_N"] & H^0(C, \omega_C \otimes N^{\otimes 2}) & H^0(C, \Omega_S^1(2C)|_C). \arrow[l, "b"]
\end{tikzcd}$$

Supposons φ_N surjectif. Comme $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ est nul, a est surjectif, donc aussi $\varphi_N \circ a$. Par suite b est surjectif. Par dualité et produit tensoriel avec $N^{\otimes 2}$, on déduit de la suite normale une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to N \to \Omega^1_S(2C)|_C \to \omega_C \otimes N^{\otimes 2} \to 0.$$

La surjectivité de b entraîne que le cobord associé à cette suite exacte est nul, et la condition (C3) est l'hypothèse requise dans l'énoncé du lemme 1: on déduit de ce lemme que la suite $(*)$ est scindée, donc aussi la suite normale de C dans S.

Remarque 5. Il résulte du lemme utilisé dans la remarque 1 que la condition suivante entraîne (C3):

(C3′) *le système linéaire* $|\omega_C \otimes N^{-1}|$ *n'a pas de point base, et on a* $H^1(C, N^{\otimes 3}) = 0$.

Elle est vérifiée si $|K_S|$ est sans point base et si $2C^2 > C \cdot K_S$.

Nous pouvons maintenant déduire de nos résultats le théorème de Wahl:

PROPOSITION 5. *Soient S une surface $K3$ plongée dans l'espace projectif, et C une section hyperplane lisse de S. Alors l'homomorphisme* φ_K: $\Lambda^2 H^0(C, \omega_C) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes 3})$ *n'est pas surjectif.*

On a dans ce cas $N = \omega_C$, de sorte que la condition (C3) est satisfaite. Supposons φ_K surjectif. Alors la suite normale de C dans S est scindée (prop. 4), donc $g(C) \leq 10$ (prop. 3). Or pour $g(C) \leq 9$ on a $\dim \Lambda^2 H^0(C, \omega_C) < \dim H^0(C, \omega_C^{\otimes 3})$, et φ_K ne peut être surjectif.

Reste le cas $g(C) = 10$. Alors C est une sextique plane (remarque 4). Considérons comme dans la prop. 4 le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^2 H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\Lambda^2 H^0(C, \omega_C) \arrow[r, "\varphi_K"] & H^0(C, \omega_C^{\otimes 3}) & H^0(C, \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)|_C). \arrow[l, "b"]
\end{tikzcd}$$

L'homomorphisme b apparait dans la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to \omega_C \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)|_C \to \omega_C^{\otimes 3} \to 0;$$

comme on a $H^1(C, \omega_C) \neq 0$ et $H^1(C, \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(6)|_C) = 0$, b n'est pas surjectif, et il en

BIBLIOGRAPHIE

[H] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, New-York-Heidelberg-Berlin (1977).

[M] D. MUMFORD. "Varieties defined by quadratic equations," in *Questions on Algebraic Varieties*, 29–100, Cremonese, Rome (1970).

[S-D] B. SAINT-DONAT. *Projective models of K3 surfaces*, Amer. J. of Math. **96** (1974), 602–639.

[W] J. WAHL. *The Jacobian algebra of a graded Gorenstein singularity*, Duke Math. J. **55** (1987), 843–872.

BEAUVILLE: MATHÉMATIQUES—BÂT. 425 UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD F-91405 ORSAY CÉDEX, FRANCE

MÉRINDOL: FAC. DES SCIENCES—B^{D} LAVOISIER UNIVERSITÉ D'ANGERS F-49045 ANGERS CÉDEX, FRANCE