Université Nice Sophia Antipolis | Année 2018/2019
L3 M/MI/MA | Semestre 1

Algèbre et Géométrie
Contrôle 1

Mardi 2 octobre 2018, durée : 1 heure

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Donner la définition du fait que λ soit une valeur propre de la matrice A.

Exercice 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Exercice 3

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -3m-2 & -2 & 3m+2 \\ -3m-2 & -4 & 3m+4 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle diagonalisable?
2. Lorsque A est diagonalisable, déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. (Ne pas calculer P^{-1}.)

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -3u_n + 4u_{n+1}$.

1. Trouver une matrice $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
2. Diagonaliser la matrice U.
3. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.