

Feuille d'exercices n°3

1. Déterminer les sous-espaces caractéristiques, la réduite de Jordan et une base de Jordan pour les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -5 \\ -4 & 1 & 4 \\ 5 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les polynômes minimaux de ces matrices ?

Quelles sont leurs décompositions de Dunford ?

2. Soit $\phi : E \rightarrow E$ un endomorphisme trigonalisable et $\dim E = n$.

2.a. Montrer que $m_\phi(X)$ et $p_\phi(X)$ ont les mêmes racines.

2.b. Montrer que ϕ est nilpotent si et seulement si 0 est l'unique valeur propre.

2.c. Montrer que si ϕ est diagonalisable et nilpotent alors ϕ est nul.

2.d. Montrer que la trace $\text{tr}(\phi) = \text{tr}(\text{Mat}(\phi)_B)$ ne dépend pas du choix de la base B . Calculer $\text{tr}(\phi^k)$ en fonction des valeurs propres de ϕ .

2.e. Montrer que si ϕ est nilpotent alors $\text{tr}(\phi^k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$. Montrer la réciproque (difficile !).

3. Calculer les puissances d'un bloc de Jordan $J_{\lambda, n}$ et (si $\lambda \neq 0$) son inverse.

4. On considère la matrice réelle dépendant du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.a. Déterminer pour quelles valeurs de m la matrice A_m est diagonalisable.

4.b. Déterminer le polynôme minimal de A_m en fonction de m .

4.c. Calculer les puissances positives de A_m quand A_m est diagonalisable.

4.d. Montrer que $(A_m)^{-1} = I_3 + A_m - (A_m)^2$ quand A_m n'est pas diagonalisable. La formule est-elle valable pour tout m ?

5. Soient deux matrices carrées $A, B \in M_n(k)$.

5.a. Montrer que si A et B sont diagonalisables et $p_A(X) = p_B(X)$, alors A et B sont semblables et $m_A(X) = m_B(X)$.

5.b. Montrer que si A et B sont trigonalisables et $p_A(X) = p_B(X)$, $m_A(X) = m_B(X)$ et $n \leq 3$, alors A et B sont semblables. Qu'en est-il pour $n \geq 4$?

MOTS-CLÉS : BASE DE JORDAN, POLYNÔME MINIMAL, DÉCOMPOSITION DE DUNFORD