Feuille d'exercices n^o 1

1. Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ et $\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty$ est surjective. Quels sont les polynômes qui satisfont ces hypothèses ?

2. Soit E_n un ensemble de cardinal n. Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathrm{Appl}(E_m, E_n)$ des applications de E_m vers E_n. Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n. Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_m(E_n)$ des parties à m éléments de E_n. Ces cardinaux sont-ils reliés ?

3. Soient $f_1 : E_1 \to E_2$ et $f_2 : E_2 \to E_3$ des applications.

3.a. Montrer que si f_1 et f_2 sont injectives (resp. surjectives resp. bijectives), alors leur composition $f_2 \circ f_1 : E_1 \to E_3$ est également injective (resp. surjective resp. bijective).
3.b. Montrer que $f_2 \circ f_1$ injective implique f_1 injective.
3.c. Montrer que $f_2 \circ f_1$ surjective implique f_2 surjective.
3.d. En déduire qu'une application inversible est bijective.

4. Soit $f : E \to F$ une application et A, B deux parties de E et C, D deux parties de F. Montrer

4.a. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4.b. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4.c. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
4.d. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
4.e. Si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple d'application $f : E \to F$ telle que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

5.a. Etablir une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$;
5.b. Etablir une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; en déduire qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
5.c. Etablir une surjection $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}_+^*$ telle que les fibres $\phi^{-1}(\frac{r}{s})$ soient finies ou dénombrables. En déduire une surjection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Conclure que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

6. Soit $A : E \to \mathcal{P}(E) : x \mapsto A(x)$ une application quelconque. Montrer que l'ensemble $E' = \{x \in E \,|\, x \notin A(x)\}$ n'appartient pas à l'image de A. En déduire que pour tout ensemble E, E et $\mathcal{P}(E)$ n'ont pas le même cardinal.

7. Construire une application surjective $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$ la fibre $\phi^{-1}(x)$ est un ensemble fini ou dénombrable. En déduire que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

Mots-Clés : Ensemble, application, cardinal, dénombrabilité.