Feuille d'exercices n^o 4

1. On pose

$$s(X) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n X^n \text{ pour } s_n = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } n = 2m \quad (m \in \mathbb{N}); \\ (-1)^m & \text{si } n = 2m+1 \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

1.a. Montrer que $s(X)$ s'identifie à une fraction rationnelle qu'on explicitera. Indication: On pourra décomposer $s(X)$ en somme d'une série formelle "paire" et d'une série formelle "impair".

1.b. Déterminer la primitive $S(X)$ de $s(X)$ qui vérifie $S(0) = 0$. Expliciter une fonction réelle dont le développement de Taylor à l'origine s'identifie à $S(X)$. Quel est son rayon de convergence ?

Déduire de ce qui précède la somme de la série numérique

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{8 \cdot 9} \pm \cdots .$$

2. On considère la série entière $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$.

2.a. Déterminer le rayon de convergence de la série $s(z)$.

2.b. Calculer les séries entières $zf'(z)$ et $z^2 f''(z)$ et $z^3 f'''(z)$ pour $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Quels sont leurs rayons de convergence ?

2.c. Déduire de **2.b** la fraction rationnelle dont le développement en série entière est $s(z)$. En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

3. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dans les cas suivants:

3.a. $a_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$;

3.b. $a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k(k!)$.

MOTS-CLÉ: Série numérique, série entière, rayon de convergence.