Examen du 25 janvier 2010
Durée : 2h00. Tous documents interdits.

BARÊME INDICATIF : 6 + 6 + 6 + 6 (NOTÉ SUR 20)

1. Projecteurs. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $p : E \to E$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. On désignera par $\mathrm{Ker}(p) = \{v \in E \,|\, p(v) = 0\}$ le noyau de p, et par $\mathrm{Im}(p) = \{v \in E \,|\, \exists w \in E : v = p(w)\}$ l'image de p.

1.a. Montrer que p est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) = \{0\}$.

On suppose dorénavant que $p \circ p = p$.

1.b. Montrer que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

1.c. Montrer qu'on a $v - p(v) \in \mathrm{Ker}(p)$ pour $v \in E$. En déduire l'existence d'une décomposition unique $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v_2 \in \mathrm{Im}(p)$.

1.d. On se donne une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que $(v_1, \ldots, v_k)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $(v_{k+1}, \ldots, v_n) = (p(w_{k+1}), \ldots, p(w_n))$ soit une base de $\mathrm{Im}(p)$. Quelle est la matrice de p dans cette base ? Quelles sont les valeurs propres de p ? Comment caractériser les cas extrémaux $k = 0$ et $k = n$?

2. Séries formelles et séries numériques. On pose

$$s(X) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n X^n \text{ pour } s_n = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } n = 2m \quad (m \in \mathbb{N}); \\ (-1)^m & \text{si } n = 2m+1 \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2.a. Montrer que $s(X)$ s'identifie à une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}[[X]]$ qu'on explicitera. On pourra écrire $s(X) = a(X)+b(X)$ avec $a(X) = \sum_{m \geq 0}(-1)^m X^{2m}$ et $b(X) = \sum_{m \geq 0}(-1)^m X^{2m+1}$, puis traiter $a(X)$ et $b(X)$ séparément.

2.b. Déterminer la primitive de $s(X)$ qui s'annule en $X = 0$, d'abord sous forme de série formelle, ensuite sous forme de fonction de classe C^∞. En déduire la somme de la série numérique

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \pm \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{8 \cdot 9} \pm \cdots . \end{aligned}$$

2.c. Soit la fraction rationnelle $u(X) = \frac{1-X+4X^2}{1+X^3} \in \mathbb{R}[[X]]$. Expliciter les coefficients du développement en série formelle $\sum_{n \geq 0} u_n X^n$ de $u(X)$.

2.d. Ecrire $u(X)$ sous forme $\frac{\alpha}{1+X} + \frac{\beta+\gamma X}{1-X+X^2}$ pour des coefficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $u(X)$, puis la somme de la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n+1}$.

3. Equations différentielles du second ordre.

3.a. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = (1 + x + x^2)e^x$.

3.b. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = 0 \quad (*)$.

On rappelle que $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Les fonctions $\mathrm{ch}(2x)$ et $\mathrm{sh}(2x)$ font-elles partie des solutions de (*)? Une solution quelconque de (*) s'écrit-elle comme combinaison linéaire de $\mathrm{ch}(2x)$ et de $\mathrm{sh}(2x)$?

3.c. Donner l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = \frac{e^{2x}}{2}$.

Idem pour $y''(x) - 4y(x) = \frac{e^{-2x}}{2}$ et pour $y''(x) - 4y(x) = \mathrm{ch}(2x)$.

4. Exponentielle de matrice et équation différentielle linéaire.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

4.a. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire une matrice de changement de base $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4.b. Calculer P^{-1} ainsi que $exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

4.c. Trouver l'unique fonction dérivable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ qui vérifie

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 3y(t) + 4z(t) \\ z'(t) = -z(t). \end{cases}$$

Que peut-on dire de la trajectoire $\phi(t)$ quand $t \to \pm\infty$?