

Contrôle n°1 du 30 septembre 2013

DURÉE: 45 MINUTES

BARÈME INDICATIF: 3.5 + 3 + 3.5

1. Injectivité, surjectivité, bijectivité, image, image réciproque.

On considère les trois applications suivantes:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - x \\ g : \left[\frac{1}{2}, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - x \\ h : [1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2 - x \end{aligned}$$

1.a. Montrer que f n'est ni injective ni surjective. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

1.b. Montrer que g est injective. Déterminer l'image $g\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right)$.

1.c. Montrer que h est bijective. Trouver $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$ telle que $k \circ h = id_{[1, +\infty[}$ et $h \circ k = id_{\mathbb{R}_+}$.

2. Loi de composition. On définit $a \star b = a + b - ab$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

2.a. Montrer l'identité $1 - a \star b = (1 - a)(1 - b)$.

2.b. Montrer que \star est une loi de composition associative et commutative.

2.c. Déterminer l'élément neutre e de (\mathbb{R}, \star) . Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a \star b = b \star a = e$.

3. Fonctions indicatrices. Groupe commutatif. Soit E un ensemble.

3.a. Rappeler la définition de la fonction indicatrice $f_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ d'une partie A de E . Montrer que pour deux fonctions indicatrices f_A et f_B , la fonction $(f_A \oplus f_B)(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2(f_A(x)f_B(x))$ définit une fonction $E \rightarrow \{0, 1\}$. Quelle est la partie D de E telle que $f_D = f_A \oplus f_B$?

3.b. Montrer que pour trois fonctions indicatrices f_A, f_B, f_C les deux fonctions $(f_A \oplus f_B) \oplus f_C$ et $f_A \oplus (f_B \oplus f_C)$ sont identiques. Quelle est la partie D' de E dont la fonction indicatrice $f_{D'}$ est représentée par $f_A \oplus f_B \oplus f_C$?

3.c. On rappelle que $\{0, 1\}^E$ désigne l'ensemble des applications $E \rightarrow \{0, 1\}$. Montrer que $(\{0, 1\}^E, \oplus, f_\emptyset)$ est un groupe commutatif.