Examen "Groupes et Géométrie" du 13 mai 2015

3 heures

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. L'inégalité d'Erdös-Mordell.

On considère trois points non-alignés A, B, C d'un plan affine, ainsi qu'un point P de l'intérieur de l'enveloppe convexe Δ de A, B, C. On désigne par $R_a(P), R_b(P), R_c(P)$ les distances de P aux sommets A, B, C, par $r_a(P), r_b(P), r_c(P)$ les distances de P aux droites $(BC), (AC), (AB)$, et par a, b, c les longueurs des segments $[BC], [AC], [AB]$. Le but de l'exercice est de démontrer *l'inégalité d'Erdös-Mordell* $R_a(P) + R_b(P) + R_c(P) \geqslant 2(r_a(P) + r_b(P) + r_c(P))$.

a) Montrer que l'aire du triangle Δ vaut $\frac{1}{2}(ar_a(P) + br_b(P) + cr_c(P))$ quelque soit P.

b) Montrer l'inégalité $R_a(P) + r_a(P) \geqslant h_a$ où h_a désigne la hauteur de A dans Δ.

c) Déduire de a) et de b) l'inégalité $aR_a(P) \geqslant br_b(P) + cr_c(P)$ quelque soit P.

d) Montrer que la réflexion par rapport à la droite affine qui passe par A et le milieu du segment $[BC]$ applique P sur un point P' tel que $R_A(P') = R_A(P)$ et $r_b(P') = r_c(P)$ et $r_c(P') = r_b(P)$. En déduire l'inégalité $aR_a(P) \geqslant br_c(P) + cr_b(P)$ ainsi que (par symétrie) les inégalités $bR_b(P) \geqslant ar_c(P) + cr_a(P)$ et $cR_c(P) \geqslant ar_b(P) + br_a(P)$.

e) Montrer que pour tout couple (x, y) de réels positifs non nuls on a l'inégalité $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$. En déduire à l'aide de d) l'inégalité d'Erdös-Mordell.

f) Montrer que l'inégalité d'Erdös-Mordell est une égalité si et seulement si Δ est un triangle équilatéral admettant P comme barycentre.

* *
*

Exercice 2. Simplicité de $SO(3)$.

Parmi les transformations orthogonales de $\mathbb{R}^3$, la rotation d'axe D et d'angle π sera notée ρ_D et appelée *retournement* ; la réflexion par rapport au plan vectoriel P sera notée σ_P.

a) Montrer que $\rho_D = -\sigma_P$ pour $P = D^\perp$. En déduire à l'aide d'un théorème du cours que toute transformation orthogonale directe $\varphi \in SO(3)$ est le composé de deux retournements.

b) Montrer que pour deux retournements quelconques ρ_D, $\rho_{D'}$ il existe une transformation orthogonale directe $\varphi \in SO(3)$ telle que $\varphi\rho_D\varphi^{-1} = \rho_{D'}$. En déduire à l'aide de a) que tout sous-groupe distingué de $SO(3)$ contenant un retournement est en fait égal à $SO(3)$.

c) Soit $\varphi \in SO(3)$. Montrer l'existence d'un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(v) = v$. (Utiliser que $\det(\varphi)$ s'identifie au produit des valeurs propres complexes de φ). En déduire que si $\varphi \neq id_{\mathbb{R}^3}$ alors $\mathbb{R}.v$ est l'unique droite fixe sous φ, et φ est une rotation d'axe $\mathbb{R}.v$.

d) Montrer à l'aide de c) que pour $\varphi \in SO(3)$ on a l'identité $\mathrm{tr}(\varphi) = 1 + 2\cos(\theta_\varphi)$ où θ_φ désigne l'angle de rotation de φ. (On pose $\theta_\varphi = 0$ si $\varphi = id_{\mathbb{R}^3}$). En déduire que l'application $A : SO(3) \to [-1, 1]$ définie par $A(\varphi) = \cos(\theta_\varphi)$ est continue.

e) Soit N un sous-groupe distingué connexe non-trivial de $SO(3)$. Montrer l'existence d'une rotation $\varphi \in N$ telle que $A(\varphi) \leqslant 0$. En déduire (par le théorème des valeurs intermédiaires) l'existence d'une rotation $\psi \in N$ telle que $A(\psi) = 0$. En déduire enfin que ψ^2 est un retournement et par conséquent que $N = SO(3)$ grâce à la question b).

f) Montrer que pour $\varphi \in SO(3)$, $\psi \in O(3)$, la transformation $\psi\varphi\psi^{-1}$ est une rotation d'axe $\psi(D)$ si φ est une rotation d'axe D. En déduire que le centre de $SO(3)$ est trivial.

On suppose dorénavant que N est un sous-groupe distingué quelconque de $SO(3)$.

g) Montrer que pour tout $\varphi \in N$, l'orbite $\{\psi\varphi\psi^{-1} \mid \psi \in SO(3)\}$ sous l'action de conjugaison de $SO(3)$ est connexe. En déduire à l'aide de f) que si N est totalement discontinu (i.e. toute partie connexe de N est singleton) alors N est le groupe trivial.

h) On notera N_0 le sous-groupe connexe maximal de N dont on admettra l'existence. On admet également que N est totalement discontinu si N_0 est trivial. Montrer que N_0 est distingué dans $SO(3)$. En déduire à l'aide de e) et de g) que $SO(3)$ est un groupe simple.

* *
*

Exercice 3. Les sous-groupes de Sylow de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$.

a) Rappeler pourquoi $Gl_3(\mathbb{F}_2)$ possède $(2^3 - 2^0)(2^3 - 2^1)(2^3 - 2^2) = 168$ éléments.

b) On notera n_2, n_3, n_7 le nombre de 2-,3-,7-Sylow de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$. Quelles sont les valeurs possibles pour n_2, n_3, n_7 selon la théorie de Sylow générale ?

c) Montrer que le sous-groupe U de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$ des matrices (a_{ij}) telles que $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ forme un 2-Sylow de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$. Montrer que la condition additionnelle $a_{12} = a_{23}$ (resp. $a_{12} = a_{23} = 0$) définit un sous-groupe distingué N (resp. Z) de U qui est cyclique d'ordre 4 (resp. 2).

d) Montrer que Z est le centre de U. En déduire que pour tout $A \in Gl_3(\mathbb{F}_2)$ le groupe conjugué AUA^{-1} est un 2-Sylow de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$ ayant comme centre AZA^{-1}.

e) On note $T(2)$ l'ensemble des éléments d'ordre 2 de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$. On admettra que l'action de conjugaison sur $T(2)$ est transitive (i.e. tous les éléments d'ordre 2 de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$ sont conjugués). Soit $T \in T(2)$ l'élément non-trivial de Z.

Montrer que le stabilisateur de l'action $\{A \in Gl_3(\mathbb{F}_2) \mid ATA^{-1} = T\}$ s'identifie à U. En déduire qu'il existe 21 éléments d'ordre 2 dans $Gl_3(\mathbb{F}_2)$, et que chacun d'eux engendre le centre d'un 2-Sylow. Conclure que $Gl_3(\mathbb{F}_2)$ possède 21 2-Sylow et 42 éléments d'ordre 4.

f) Quel est l'ordre de $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ et comment réaliser $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ comme sous-groupe de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$? En déduire un élément d'ordre 3 dans $Gl_3(\mathbb{F}_2)$. On considérant l'action de conjugaison sur l'ensemble $T(3)$ des éléments d'ordre 3 montrer que le cardinal de $T(3)$ est 56. (On pourra admettre que l'action est transitive). En déduire le nombre de 3-Sylow de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$.

g) A l'aide de e) et de f) déterminer le cardinal de l'ensemble $T(7)$ des éléments d'ordre 7 de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$. En déduire le nombre de 7-Sylow de $Gl_3(\mathbb{F}_2)$.

* *
*

BARÊME INDICATIF : 6 + 7 + 7