**Examen du 3 janvier 2017.**
**Durée: 2h. Tous documents interdits.**

**1. Frontière.** Soit $E$ un espace topologique et $A$ une partie de $E$. On rappelle que la frontière $\mathrm{Fr}(A)$ est définie par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \overset{o}{A}$.

**1.a.** Rappeler pourquoi on a des inclusions $\overset{o}{A} \subset A \subset \overline{A}$. En déduire que $A$ est ouvert si et seulement si $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.

**1.b.** Donner l'exemple d'une partie de $\mathbb{R}$ dont la frontière est $\mathbb{R}$. Donner l'exemple de deux intervalles $I, J$ de $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Fr}(I \cup J) \neq \mathrm{Fr}(I) \cup \mathrm{Fr}(J)$.

**1.c.** Montrer que pour toutes parties $A, B$ de $E$, on a une inclusion

$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$

**1.d.** Montrer qu'on a égalité $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$ dès que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

**2. Compacité locale et théorème de Baire.** Un espace topologique $E$ est dit *localement compact* si pour tout ouvert non vide $V$ et tout $x \in V$ il existe un ouvert $U$ tel que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$ et tel que $\overline{U}$ est une partie compacte de $E$.

On rappelle qu'une partie $A$ de $E$ est dite *dense* si $\overline{A} = E$.

**2.a.** Montrer que l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle est localement compact.

**2.b.** Montrer qu'une partie $A$ de $E$ est dense si et seulement si tout ouvert non vide de $E$ rencontre $A$. En déduire que deux ouverts denses de $E$ ont une intersection qui est un ouvert dense de $E$.

**2.c.** Déduire de **2.b** que pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'ouverts denses de $E$ il existe une suite *décroissante* $(B_n)_{n \geq 0}$ d'ouverts denses de $E$ telles que $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} B_n$. En particulier, si $V$ est un ouvert non vide de $E$, montrer que $(B_n \cap V)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante d'ouverts non vides de $E$.

**2.d.** On suppose que $E$ est localement compact. Pour tout ouvert non vide $V$ de $E$, construire par récurrence sur $n$ une suite décroissante $(K_n)_{n \geq 0}$ de parties compactes d'intérieur non vide telles que $K_n \subset B_n \cap V$. En déduire que $(\bigcap_{n \geq 0} B_n) \cap V$ contient $\bigcap_{n \geq 0} K_n$. On rappelle du cours que $\bigcap_{n \geq 0} K_n \neq \emptyset$.

**2.e.** Déduire de **2.b-2.d** que dans un espace localement compact une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (c'est le théorème de Baire).

**2.f.** Montrer qu'une partie $A$ de $E$ est dense si et seulement si $E \backslash A$ est d'intérieur vide. En déduire grâce à **2.e** que dans un espace localement compact une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Conclure que pour $n > 0$ l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ n'est pas dénombrable.

**3. Changement de variable linéaire.** Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda)$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda$ est la mesure de Lebesgue.

**3.a.** Montrer que toute fonction mesurable $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ définit une mesure $\mu_f$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ par $\mu_f(A) = \lambda(f^{-1}(A))$ pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

**3.b.** Montrer que pour toute fonction mesurable $\phi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, la fonction composée $\phi \circ f$ est également mesurable. Montrer que si $\phi$ est étagée positive alors $\phi \circ f$ également, et on a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu_f = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \circ f) d\lambda.$$

**3.c.** Montrer que si $\phi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est $\mu_f$-intégrable alors $\phi \circ f$ est $\lambda$-intégrable, et on a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu_f = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \circ f) d\lambda.$$

On pourra supposer que $\phi$ est positive.

**3.d.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une transformation linéaire inversible. Pourquoi la fonction $f$ est-elle mesurable ? Montrer que la mesure associée $\mu_f$ vérifie

$$\mu_f(a + A) = \mu_f(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

En déduire que $\mu_f(A)/\mu_f([0,1]^n) = \lambda(A)$ pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

**3.e.** Montrer que pour $f$ orthogonal (resp. diagonal à termes positifs) on a $\mu_f([0,1]^n) = 1$ (resp. $\mu_f([0,1]^n) = \frac{1}{\det(f)}$). On admettra que cela entraine que pour $f \in Gl_n(\mathbb{R})$ quelconque, on a $\mu_f([0,1]^n) = \frac{1}{|\det(f)|}$.

**3.f.** Déduire de ce qui précède que pour $f \in Gl_n(\mathbb{R})$ et pour $\phi$ $\lambda$-intégrable, on a la formule de changement de variable:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\phi \circ f) d\lambda = \frac{1}{|\det(f)|} \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\lambda.$$

Barème indicatif:

5 + 7 + 8 =

(1+1+1.5+1.5) + (1+1.5+1.5+1.5+1.5) + (1+1.5+1.5+1.5+1.5+1)