Feuille d'exercices n^{o}1

Espaces vectoriels normés et espaces métriques

1) a) Dessiner les boules-unités fermées du plan $\mathbb{R}^2$, muni resp. de la norme $\|-\|_1$, de la norme $\|-\|_2$ et de la norme $\|-\|_\infty$.

b) Montrer que pour deux normes N_1, N_2 sur $\mathbb{R}^2$, on a l'inclusion des boules-unité fermées $B_f^1(0,1) \subseteq B_f^2(0,1)$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a l'inégalité $N_2(x) \leq N_1(x)$.

c) Montrer d'abord de manière algébrique, puis de manière géométrique (en utilisant 1b) que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2}\|x\|_2 \leq 2\|x\|_\infty$ pour $x \in \mathbb{R}^2$.

2) a) Rappeler la définition d'un ouvert d'un espace vectoriel normé.

b) Montrer (à l'aide de 1c) que chaque boule ouverte de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_2)$ contient une boule de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_\infty)$ ayant le même centre, et vice versa.

c) En déduire que chaque ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_2)$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_\infty)$, et vice versa, donc que l'ensemble des ouverts de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_2)$ est identique à l'ensemble des ouverts de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_\infty)$.

3) Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer que pour deux points distincts $x, y \in E$, il existe des ouverts disjoints U, V de E tels que $x \in U$ et $y \in V$. En déduire que les parties singleton de E sont fermées.

b) Montrer que pour tout ouvert U, et tout point $x \in U$, il existe un ouvert V tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

c) Montrer que la propriété précédente est équivalente à la suivante : pour tout point $x \in E$ et toute partie fermée F de E ne contenant pas x, il existe des ouverts disjoints V, V' de E tels que $x \in V$ et $F \subset V'$.

4) Soit A une partie d'un espace métrique (E, d) et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de A.

a) Rappeler la définition d'un point-limite x de la suite (x_n). Montrer que x est point-limite si et seulement si toute ϵ-boule ouverte $B(x, \epsilon)$ contient "presque tous" les termes de la suite (x_n).

b) En déduire que si x est point-limite de (x_n) alors tout voisinage de x rencontre A (i.e. x appartient à l'adhérence de A).

c) Montrer inversement que si $y \in \overline{A}$ alors il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A qui converge vers y.

d) Déduire de ce qui précède que A est fermée si et seulement si toute suite convergente, formée d'éléments de A, converge vers un élément de A.

5) Soient (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r > 0$.

a) Montrer que $\overline{B(a;r)} \subset B_f(a;r)$.

b) Montrer que si E est un espace vectoriel et la métrique de E provient d'une norme, alors $B_f(a;r) \subset \overline{B(a;r)}$. On pourra utiliser une suite $x_k = \lambda_k a + (1 - \lambda_k)x$ pour des $\lambda_k \in \mathbb{R}$ convenables.

c) Trouver un espace métrique E tel que $B_f(a;r) \not\subset \overline{B(a;r)}$. Indication: on pourra restreindre la métrique usuelle de la droite réelle à l'ensemble des entiers relatifs.

6) Soient A, B deux parties d'un espace métrique.

a) Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Montrer l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

c) Montrer l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7) a) Montrer que sur la droite réelle, munie de la métrique usuelle, les intervalles ouverts (bornés ou non) sont des ouverts. Montrer de même que les intervalles fermés (bornés ou non) sont des fermés.

b) Donner l'exemple d'une suite décroissante (pour l'inclusion) de parties ouvertes de $\mathbb{R}$ dont l'intersection est fermée, mais non ouverte. De même, donner l'exemple d'une suite croissante de parties fermées de $\mathbb{R}$ dont la réunion est ouverte, mais non fermée.

c) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$. Déterminer la plus grande partie ouverte de $\mathbb{R}$ contenue dans $\mathbb{Q}$, ainsi que la plus petite partie fermée de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$.

Mots-Clés: *Ouverts, Fermés, Adhérence*