Feuille d'exercices n^{o}5

Espaces mesurés et Mesure-produit.

1. Mesures à support ponctuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ désigne la tribu des parties boréliennes sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\delta_x : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de Dirac définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1.a. Montrer que δ_x est une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

1.b. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe un ouvert maximal $U_\mu \subset \mathbb{R}^n$ de mesure nulle: $\mu(U_\mu) = 0$. Le *support de la mesure* μ est défini par $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}^n \backslash U_\mu$. Montrer que $\mathrm{supp}(\delta_x) = \{x\}$.

1.c. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ à support ponctuel $\{x\}$. Montrer que $\mu = \lambda\delta_x$ pour un réel $\lambda \geq 0$. (On pourra montrer que pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ contenant x on a $\mu(A) = \mu(\{x\})$ en calculant $\mu(A\backslash\{x\})$.)

1.d. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ à support fini $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Décrire μ comme une combinaison linéaire de mesures de Dirac. Quand est-ce que μ est une mesure de probabilité ? En connaissez-vous ?

1.e. Soit f une fonction mesurable sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ et μ une mesure à support fini. Que veut dire que f est μ-intégrable ? Le cas échéant calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

2. Unicité des mesures. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection de parties de X stable par intersection finie et contenant X. On note $\lambda(\mathcal{B})$ la plus petite partie de $\mathcal{P}(X)$ contenant $\mathcal{B}$, et stable par différence et par réunion dénombrable croissante.

2.a. Montrer que $\lambda(\mathcal{B})$ est stable par intersection finie. En déduire que $\lambda(\mathcal{B})$ s'identifie à la tribu $\sigma(\mathcal{B})$ engendrée par $\mathcal{B}$.

2.b. Soient μ, ν deux mesures *finies* sur l'espace mesurable $(X, \lambda(\mathcal{B}))$. Montrer que $\mu = \nu$ dès que $\mu_{|\mathcal{B}} = \nu_{|\mathcal{B}}$.

2.c. Soient μ, ν deux mesures σ*-finis* sur l'espace mesurable $(X, \lambda(\mathcal{B}))$. Montrer que $\mu = \nu$ dès que $\mu_{|\mathcal{B}} = \nu_{|\mathcal{B}}$.

Indication: montrer que $\mu_n(\cdot) = \mu(\cdot \cap X_n)$ est une mesure finie sur $(X, \lambda(\mathcal{B}))$ dès que X_n est de mesure finie.

3. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la collection des parties A de $\mathbb{N}$ ayant la propriété que soit A est fini soit $\mathbb{N}\backslash A$ est fini.

3.a. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

3.b. Montrer que $\mu : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ définie par ($\mu(A) = 0$ ssi A fini) vérifie bien $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ mais que μ n'est pas une mesure.

4. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables $(X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

4.a. Montrer que $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables s'ils existent.

4.b. Montrer que $\overline{\lim}_n f_n$ et $\underline{\lim}_n f_n$ sont mesurables s'ils existent.

4.c. Montrer que la limite simple de la suite est mesurable si elle existe.

5. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On rappelle que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ désigne la tribu sur $X \times Y$ engendrée par $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

5.a. Montrer que pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ les "sections"

$$\begin{aligned} C_x &= \{y \in Y \mid (x,y) \in C\}, \text{ resp.} \\ C^y &= \{x \in X \mid (x,y) \in C\} \end{aligned}$$

appartiennent à $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{A}$.

5.b. Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable. Montrer que pour tout $x \in X$ la fonction $f_x : (Y, B) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) : y \mapsto f(x,y)$ est mesurable.

5.c. Montrer qu'il existe une et une seule mesure $\mu \otimes \nu$ sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ vérifiant $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Pour cette mesure on a

$$\int_C d(\mu \otimes \nu) = \int_X \nu(C_x) d\mu = \int_Y \mu(C^y) d\nu \quad \text{pour tout } C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$