Partiel du 22 octobre 2013
Durée: 1h30. Tous documents interdits.

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$. On pose $C_{ij} = A_i \cap B_j$ pour $i, j \in \{1, 2\}$ où

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\} \qquad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$$
$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\} \qquad B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^3\}$$

1.a. Dessiner dans un même graphique les graphes des fonctions $y = x$ et $y = x^3$ (avec un soin particulier pour le second en ce qui concerne son allure à l'origine). Situer les C_{ij} dans le complémentaire de ces deux graphes.

1.b. Montrer que les C_{ij} sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Lesquels parmi les C_{ij} peuvent s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^2$? Y a-t-il parmi les adhérences $\overline{C_{ij}}$ des parties compactes de $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.

1.c. Déterminer les frontières des quatres parties C_{ij} ? Parmi ces frontières lesquelles peuvent être représentées comme des graphes de fonctions ? Le cas échéant indiquez la fonction dont le graphe réalise la frontière.

1.d. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ et on munit C_{ij} de la topologie induite. Montrer que f est un homéomorphisme. En déduire que C_{11} et C_{22} sont homéomorphes, et que C_{12} et C_{21} sont homéomorphes. Montrer que l'intersection $\overline{C_{ij}} \cap \overline{f(C_{ij})}$ est une partie discrète dans $\mathbb{R}^2$ pour tous i, j.

2. Locale compacité et propriété de Baire. On considère une famille $(F_k)_{k \geq 0}$ de parties de $\mathbb{R}^n$ qui sont toutes fermées et d'intérieur vide. On veut montrer que leur réunion est encore d'intérieur vide (c'est la *propriété de Baire*).

2.a. Montrer qu'une partie d'un espace topologique est d'intérieur vide si et seulement si son complémentaire est dense.

2.b. Montrer que l'intersection de deux parties compactes d'un espace séparé est compacte. Rappeler pourquoi dans un espace compact l'intersection d'une suite décroissante de parties fermées non vides est non vide.

2.c. Montrer que $\mathbb{R}^n$ est *localement compact*, i.e. pour tout point x de tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ il existe un ouvert V avec $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ et $\overline{V}$ compact.

2.d. Soient F une partie fermée et U une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si F est d'intérieur vide alors il existe une partie compacte d'intérieur non vide contenue dans U et disjointe de F. (On pourra utiliser **2.a** et **2.c**).

2.e. Construire récursivement pour tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ une suite décroissante de parties compactes non vides $(K_k^U)_{k \geq 0}$ contenues dans U et telles que $K_k^U \cap F_k = \emptyset$. (Cette preuve n'utilise que la locale compacité de $\mathbb{R}^n$!).

2.f. Déduire alors de **2.b** et **2.e** que $\mathbb{R}^n$ vérifie la propriété de Baire. Déduire de la propriété de Baire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ est non-dénombrable.

BARÊME INDICATIF: 8 + 12