Feuille d'exercices n°4

1. Rotations et réflexions dans l'espace.

1.a. Quels sont l'axe et l'angle de rotation de la transformation orthogonale représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

1.b. On se donne deux hyperplans distincts H_1, H_2 de $\mathbb{R}^3$ et on note σ_1, σ_2 les réflexions associées. Montrer que le composé $\sigma_2\sigma_1$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle de rotation en fonction de H_1 et H_2.

2. Le groupe orthogonal. Soient H_1, H_2 deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et s_1, s_2 les réflexions par rapport à H_1, H_2.

2.a. Montrer l'existence d'une transformation orthogonale $\phi \in SO(n)$ telle que $\phi(H_1) = H_2$. On pourra utiliser les décompositions $H_1 \oplus H_1^\perp = \mathbb{R}^n = H_2 \oplus H_2^\perp$.

2.b. Montrer que $\phi s_1 \phi^{-1} = s_2$.

2.c. On appelle commutateur d'un groupe G tout élément de la forme $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ pour $a, b \in G$, et on note $[G,G]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. Montrer que $[O(n), O(n)] \subseteq SO(n)$.

2.d. Montrer à l'aide de **2.b.** que le produit s_1s_2 est un commutateur de $O(n)$. En déduire $[O(n), O(n)] = SO(n)$.

3. Les sphères comme espaces homogènes. On considère l'action canonique de $Gl_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$.

3.a. Déterminer le sous-groupe G de $Gl_n(\mathbb{R})$ qui applique la sphère-unité S^{n-1} sur elle-même.

3.b. Déterminer le sous-groupe H de G qui fixe $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. En déduire une bijection $G/H \cong S^{n-1}$.

3.c. Montrer que $\mathrm{SO}(n)$ est un sous-groupe distingué de G et que $H \cap \mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n-1)$. En déduire une bijection $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong S^{n-1}$.

4. Dual d'un polyèdre convexe. Soit P une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^3$. On définit le dual par

$$\check{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid <x,y> \leq 1 \quad \forall y \in P\}.$$

4.a. Montrer que $\check{P}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^3$.

4.b. Montrer que si l'origine est un point intérieur de P alors $\check{P}$ est une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^3$, et $\check{\check{P}} = P$.

4.c. Montrer que si P est un polyèdre convexe, alors $\check{P}$ également.

4.d. Montrer que si P est un polyèdre convexe centré en l'origine alors la droite vectorielle qui passe par le barycentre d'une face de P est perpendiculaire à cette face. En déduire que $\check{P}$ est à dilatation près l'enveloppe convexe des barycentres des faces de P. Montrer que le nombre de sommets (resp. faces) de $\check{P}$ est égal au nombre de faces (resp. sommets) de P. Que peut-on en déduire sur le nombre d'arêtes de $\check{P}$?

5. Le groupe des isométries du tétraèdre. Soit T un tétraèdre régulier centré en l'origine de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{I}_T$ le groupe des isométries affines préservant T.

5.a. En faisant agir $\mathcal{I}_T$ sur l'ensemble des sommets de T, construire une injection de $\mathcal{I}_T$ dans $\mathfrak{S}_4$. Montrer que l'injection précédente est un isomorphisme : $\mathcal{I}_T \cong \mathfrak{S}_4$.

5.b. Quel est le morphisme composé $\mathfrak{S}_4 \cong \mathcal{I} \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? En déduire le groupe des isométries positives de T.

6. Le groupe des isométries du cube. Soit C un cube centré en l'origine de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{I}_C$ son groupe des isométries.

6.a. Montrer que $\mathcal{I}_C$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(3)$. On note alors $\mathcal{I}_C^+ := \mathcal{I}_C \cap \mathrm{SO}(3)$.

6.b. Montrer que $\mathcal{I}_C$ agit sur l'ensemble à 4 éléments formé des grandes diagonales de C. On note $\phi : \mathcal{I}_C \to \mathfrak{S}_4$ le morphisme associé.

6.c. Montrer que $\mathrm{Ker}\phi = \{\pm id\}$ et que ϕ est surjective.

6.d. Montrer que le morphisme $(\phi, \det) : \mathcal{I}_C \to \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

6.e. Montrer que $\mathcal{I}_C^+$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

6.f. Remarquer qu'il y a deux tétraèdres réguliers T_1 et T_2 inscrits dans C (leurs arêtes sont les diagonales des faces de C). On note $\mathcal{I}_{T_1}$ et $\mathcal{I}_{T_2}$ leurs groupes d'isométries respectifs. Montrer que $\mathcal{I}_{T_1} = \mathcal{I}_{T_2}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{I}_C$ isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. Montrer qu'il n'est pas conjugué à $\mathcal{I}_C^+$.

MOTS-CLÉS : Rotations, réflexions, groupe orthogonal, polyèdres convexes, groupe des isométries.