Fonctions d'une variable complexe

Cours et exercices

Clemens Berger[1]

Janvier 2010

[1]Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, 06108 Nice Cedex

Table des matières

Préface

Ce texte représente le cours (12 séances d'une heure et demie) sur les fonctions d'une variable complexe que j'ai donné en L3 de Mathématiques Pures à Nice, pendant trois années consécutives (de 2007/2008 à 2009/2010).

Le thème est classique et représente une des "perles" de l'enseignement des mathématiques à l'université. J'ai essayé autant que possible de donner des démonstrations complètes aux théorèmes principaux.

Chapitre 1

Fonctions holomorphes

1.1 Structure complexe du plan.

Le plan réel $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. D'habitude, les points de $\mathbb{R}^2$ sont représentés par leurs coordonnées (x, y) dans la base canonique. Nous allons identifier $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ en identifiant un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ au nombre complexe $x + iy$ de $\mathbb{C}$ dont parties réelle et imaginaire sont les coordonnés du point :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x + iy \end{aligned}$$

En particulier, la *norme* du vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'identifie au *module* du nombre $x + iy \in \mathbb{C}$.

Lemme 1.1. *Sous l'identification ci-dessus, la* multiplication *par le nombre complexe $x + iy$ définit une* similitude du plan*. La matrice de cette similitude est*

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Inversement, une telle similitude s'interprètre comme la multiplication par un nombre complexe. La multiplication de nombres complexes correspond ainsi à la composition de similitudes du plan.

Démonstration. La base canonique de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel est $(1, i)$. La multiplication par $x + iy$ est $\mathbb{R}$-linéaire et applique 1 sur $x + iy$ et i sur $-y + ix$. Sa matrice a donc la forme prétendue. Inversement, une telle matrice agit sur les points de $\mathbb{R}^2$ comme le fait la multiplication par $x + iy$ sur $\mathbb{C}$.

Enfin, la multiplication complexe $(x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$ correspond bien au produit matriciel

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + yx') \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}.$$

□

1.2 Rappels sur la topologie du plan.

Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathbb{C}$ est muni d'une topologie canonique. Une partie U de $\mathbb{C}$ est *ouverte* pour cette topologie si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un *disque ouvert*

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$$

de *rayon* r, de *centre* z_0, et contenu dans U. Il s'en suit que tout ouvert de $\mathbb{C}$ s'écrit comme réunion de disques ouverts.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est *fermée* si son complémentaire $\mathbb{C}\backslash A$ est ouvert.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est *compacte* si A est fermée et bornée.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est *connexe* s'il n'existe pas de décomposition en deux parties non vides disjointes $A = A_1 \sqcup A_2$ telles que $A_1 = A \cap U_1$ et $A_2 = A \cap U_2$ pour deux ouverts U_1, U_2 de $\mathbb{C}$.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est *connexe par arcs* si, pour tous $x, y \in A$, il existe une application continue $\phi : [0,1] \to A$ telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Toute partie connexe par arcs est connexe. La réciproque est fausse en général. Cependant,

Lemme 1.2. *Un ouvert de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.*

L'*adhérence* $\bar{A}$ d'une partie A de $\mathbb{C}$ est la plus petite partie fermée de $\mathbb{C}$ contenant A. En particulier, l'adhérence du disque ouvert $D_r(z_0)$ est le *disque fermé*

$$\bar{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\}.$$

On utilisera souvent que tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contient un disque fermé $\bar{D}_s(z_0)$ de même centre avec un rayon s vérifiant $0 < s < r$.

1.3 Dérivation complexe

Définition 1.3. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in U$. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est* $\mathbb{C}$-dérivable *ou* holomorphe *en z_0 si la limite*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, auqel cas elle sera notée $f'(z_0)$ ou $\frac{df}{dz}(z_0)$. On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe (sur U) si f est holomorphe en tout point de U. La dérivée de f est alors notée

$$f' : U \to \mathbb{C} : z \mapsto f'(z).$$

Exemples 1.4. –

1. La fonction $z \mapsto z^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$) est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Sa dérivée en z_0 est nz_0^{n-1}.
2. La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Sa dérivée en $z_0 \in \mathbb{C}^*$ est $-\frac{1}{z_0^2}$.
3. Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. Alors $f \pm g$ et fg sont des fonctions holomorphes $U \to \mathbb{C}$ ayant comme dérivées :
$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(fg)' = f'g + fg'$$
De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$. En particulier, la dérivation complexe est une opération $\mathbb{C}$-linéaire.

4. Si $g : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ est une fonction holomorphe $U \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{g(z)}$. Pour toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ on a alors
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
5. Toute fonction polynomiale $z \mapsto P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$ avec $a_i \in \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Toute fraction rationnelle $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est holomorphe en dehors des racines de $Q(z)$.
6. On verra plus loin que toute *série entière* $z \mapsto s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ est holomorphe sur le disque ouvert $D_R(0)$, où R est le *rayon de convergence* de $s(z)$.
   Par exemple, $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

   La dérivée d'une série entière est calculée terme par terme, donc $s'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$. Le rayon de convergence de $s'(z)$ est identique au rayon de convergence de $s(z)$.

1.4 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ comme dans la section 1.1, on peut représenter f sous la forme
$$\begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \end{array}$$
de sorte que
$$f(x+iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$$
respectivement
$$f_1(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy) \text{ et } f_2(x,y) = \mathrm{Im} f(x+iy).$$

On peut donc comparer la *différentiabilité* de f en (x_0, y_0) en tant que fonction de *deux variables réelles* avec la *dérivabilité* de f en x_0+iy_0 en tant que fonction d'*une variable complexe.*

Si f est différentiable en (x_0, y_0), la *différentielle*
$$Df_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
est une *application* $\mathbb{R}$*-linéaire*, la “meilleure approximation $\mathbb{R}$-linéaire” de f en (x_0, y_0).

Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en x_0+iy_0, la dérivée $f'(x_0+iy_0)$ représente la “meilleure approximation $\mathbb{C}$-linéaire” de f en $x_0 + iy_0$.

Proposition 1.5. *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe en $x_0 + iy_0 \in U$ si et seulement si f (en tant que fonction de deux variables réelles) est différentiable en (x_0, y_0) et la différentielle $Df_{(x_0,y_0)}$ est une similitude du plan, i.e. les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites :*
$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \ \text{ et } \ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

Dans ce cas, on a $f'(x_0+iy_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Démonstration. La $\mathbb{C}$-dérivabilité implique la différentiablilité. Inversement, la différentiabilité implique la $\mathbb{C}$-dérivabilité à condition que la différentielle corresponde à la multiplication par un nombre complexe ce qui, d'après le Lemme 1.1, est précisément la cas quand la différentielle est une similitude du plan, i.e. quand

$$Df_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la dérivée $f'(x_0+iy_0)$ vaut $a+ib$. $\square$

Chapitre 2

Intégrales de Cauchy

2.1 Intégrales curvilignes dans le plan

Une application continue (resp. de classe C^1) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est appelée *chemin* continu (resp. de classe C^1). Un *lacet* est un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Plus généralement, un chemin (ou lacet) continu $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est dit C^1 *par morceaux* s'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = b$ telle que les restrictions $\gamma_{|[a_i,a_{i+1}]}$ soient de classe C^1 pour $0 \leq i < N$. Un *chemin affine* est donné par

$$\gamma_{[x,y]} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1-t)x + ty$$

pour deux points $x, y \in \mathbb{R}^2$. Ce chemin parcourt le segment $[x,y]$; il est de classe C^∞.

Définition 2.1. *Soient $P, Q : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to U$ un chemin de classe C^1. Alors l'intégrale curviligne de la "forme différentielle" $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ le long de γ est définie par*

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy := \int_a^b \big(P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t)\big)\, dt.$$

Définition 2.2. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin de classe C^1. Alors l'intégrale de Cauchy de f le long de γ est définie par*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Ces deux définitions s'étendent aux chemins C^1 par morceaux en remplaçant l'intégrale par une somme finie d'intégrales selon la subdivision finie en chemins de classe C^1. Cette extension de définition est consistente par (2.6a).

Remarque 2.3. L'intégrale de Cauchy se ramène à deux intégrales curvilignes de la première espèce en séparant parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (f_1(x,y) + if_2(x,y))\,(dx + idy) \\ &= \int_\gamma f_1(x,y)dx - f_2(x,y)dy + i\int_\gamma f_2(x,y)dx + f_1(x,y)dy.\end{aligned}$$

Pour les calculs, il est en général préférable de ne pas effectuer cette séparation en parties réelle et imaginaire, mais de calculer la valeur de l'intgrale en explicitant une primitive de $(f \circ \gamma)\gamma'$. Si f possède elle-même une primitive F, alors la fonction $(f \circ \gamma)\gamma'$ admet comme primitive $F \circ \gamma$. Dans ce cas, si γ est un lacet, l'intégrale est nulle ! Un des premiers buts de ce cours est de montrer que si f est holomorphe sur un disque ouvert, alors f admet une primitive sur ce disque.

Exemple 2.4. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{it}$. Alors

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Définition 2.5. *Soient $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Alors le chemin composé $\gamma_1\gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$ est défini par*

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & si\ t \in [a, b]; \\ \gamma_2(t) & si\ t \in [b, c]. \end{cases}$$

Le chemin opposé $\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}$ de $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est défini par

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t).$$

Lemme 2.6. *Avec les notations ci-dessus, on a pour toute fonction continue f :*

(a) $\int_{\gamma_1\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$*;*
(b) $\int_{\bar{\gamma}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$*;*
(c) $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$ *pour tout difféomorphisme $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$.*

Démonstration. (a) suit de la règle de Chasles. (b) est immédiat. (c) est une conséquence de la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\phi(t))(\gamma\phi)'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\phi(t))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &= \int_{\phi(\alpha)=a}^{\phi(\beta)=b} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\ &= \int_\gamma f(z)dz. \end{aligned}$$

□

2.2 Théorème de Cauchy

Dans la proposition qui suit, R désignera un *rectangle axial* dans $\mathbb{R}^2$, i.e. l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x_0 \leq x \leq x_1$ et $y_0 \leq y \leq y_1$ pour $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ donnés. Les sommets de R sont les points (x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_1, y_1) et (x_0, y_1). Cet ordre définit un *lacet* ∂R qui parcourt le bord du rectangle dans le sens positif. De manière précise : $\partial R = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ où

- $\gamma_1 = \gamma_{[(x_0,y_0),(x_1,y_0)]}$ est le chemin affine qui relie (x_0, y_0) à (x_1, y_0) ;
- $\gamma_2 = \gamma_{[(x_1,y_0),(x_1,y_1)]}$ est le chemin affine qui relie (x_1, y_0) à (x_1, y_1) ;
- $\gamma_3 = \gamma_{[(x_1,y_1),(x_0,y_1)]}$ est le chemin affine qui relie (x_1, y_1) à (x_0, y_1) ;
- $\gamma_4 = \gamma_{[(x_0,y_1),(x_0,y_0)]}$ est le chemin affine qui relie (x_0, y_1) à (x_0, y_0).

Proposition 2.7 (Green-Riemann pour un rectangle)**.** *Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions de classe C^1 définies au voisinage d'un rectangle axial R dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que le lacet ∂R qui parcourt le bord de R est orienté dans le sens positif. Alors*

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) dxdy = \int_{\partial R} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Démonstration. Nous supposons que $R = [x_0, y_0] \times [x_1, y_1]$ et que le lacet ∂R est issu de (x_0, y_0) comme ci-dessus. Néanmoins, le résultat reste valide pour un parcours du bord de R *issu de n'importe lequel de ses quatre sommets* à condition que le sens du parcours soit *positif.*

$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy &= \int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dx\right) dy \\
&= \int_{y_0}^{y_1} (Q(x_1, y) - Q(x_0, y))dy \\
&= \int_{\partial R} Q(x, y)dy.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
-\int\int_R \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy &= -\int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dy\right) dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (P(x, y_0) - P(x, y_1))dx \\
&= \int_{\partial R} P(x, y)dx.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.8 (Cauchy)**.** *Soit $f : D_R(w) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un disque ouvert. Alors f admet une primitive complexe sur $D_R(w)$. En particulier, pour tout lacet γ dans $D_R(w)$,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration. On a déjà observé en (2.3) que l'existence d'une primitive de f entraine la nullité de l'intégrale de Cauchy de f le long d'un lacet. Pour construire une primitive F de f on se sert de l'intégrale de Cauchy et de la proposition 2.7.

Soit $z_0 \in D_R(w)$. On pose $F(z_0) = 0$. Pour tout $z \neq z_0$ appartenant à $D_R(w)$, le rectangle axial $R = R(x_0, x_1, y_0, y_1)$ tel que $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z = x_1 + iy_1$ est entièrement contenu dans $D_R(w)$. Il définit un lacet unique $\partial R = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ issu de z_0 et orienté dans le sens positif. D'après

(2.7) et (2.3), on a pour $f = f_1 + if_2$ (en supposant la continuité des dérivées partielles) :

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} f(z)dz &= \int_{\partial R} f_1(x,y)dx - f_2(x,y)dy + i\int_{\partial R} f_2(x,y)dx + f_1(x,y)dy \\ &= \int\int_R \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\right) dxdy + i\int\int_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\right) dxdy \\ &= 0,\end{aligned}$$

la dernière égalité étant conséquence des conditions de Cauchy-Riemann satisfaites par f, cf. (1.5). On peut donc poser (en utilisant le lemme 2.6) :

$$F(z) := \int_{\gamma_1\gamma_2} f(z)dz = \int_{\bar\gamma_4\bar\gamma_3} f(z)dz.$$

La valeur $F(z)$ s'écrit $F(x+iy) = F_1(x,y) + iF_2(x,y)$ de sorte que, comme ci-dessus, $F_1(x,y)$ s'obtient comme l'intégrale de la forme différentielle $f_1(x,y)dx - f_2(x,y)dy$, et $F_2(x,y)$ s'obtient comme l'intégrale sur la forme différentielle $f_1(x,y)dy + f_2(x,y)dx$. Du fait que l'intégrale se calcule soit le long de $\gamma_1\gamma_2$ soit le long de $\bar\gamma_4\bar\gamma_3$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= f_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -f_2, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= f_2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = f_1.\end{aligned}$$

La fonction F vérifie donc les conditions de Cauchy-Riemann et sa dérivée $F' = f$, cf. (1.5). $\square$

Remarque 2.9. Théorème 2.8 reste vrai si l'on suppose seulement que f est holomorphe sur $D_R(w)\backslash\{z_0\}$, et continue sur $D_R(w)$, pour un certain point $z_0 \in D_R(w)$. En effet, dans la construction de la primitive F de f on se place dans ce point z_0, et on découpe le rectangle R en quatre petits rectangles R_1, R_2, R_3, R_4 partageant un sommet commun à l'intérieur de R.

Tout ce qu'il faut établir, c'est la nullité de l'intégrale de f le long du bord ∂R du grand rectangle R. Or, cette intégrale se ramène, grâce au Lemme 2.6, à la somme de quatre intégrales de f le long des bords ∂R_i des quatre petits rectangles inscrits dans R. Parmi ces quatres rectangles, un contient z_0 (disons R_1) tandis que les trois autres (R_2, R_3, R_4) ne contiennent pas z_0. Ces trois intégrales sont donc nulles grâce au Théorème 2.8, tandis que la première intégrale est majorée par $\|f\|_\infty \cdot p(R_1)$ où $p(R_1)$ désigne le périmètre de R_1. En découpant R convenablement, ce périmètre de R_1 peut être choisi arbitrairement petit, ce qui montre que la contribution de la première intégrale est arbitrairement petite, voire nulle dans le cas limite.

2.3 Indice d'un lacet

Définition 2.10. *L'indice d'un lacet (C^1 par morceaux) γ en $z_0 \in \mathbb{C}$ est donnée par l'intégrale*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \quad (\textit{où } z_0 \notin \mathrm{Image}(\gamma))$$

Exemple 2.11. Pour le lacet $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$, on obtient $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(0) = n$.

Théorème 2.12 (Formule intégrale de Cauchy)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D_R(w)$. Alors pour tout lacet γ in $D_R(w)$ et tout $z_0 \in D_R(w) \backslash \mathrm{Image}(\gamma)$ on a la formule :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) f(z_0).$$

Démonstration. La fonction

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

est continue dans $D_R(w)$ est holomorphe en dehors de z_0. Théorème 2.8 et Remarque 2.9 permettent alors de conclure. □

Proposition 2.13. *Pour un lacet donné γ, l'indice $Ind_\gamma(-)$ est une fonction continue sur $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Image}(\gamma)$ qui ne prend que des valeurs entières. En particulier, $Ind_\gamma(-)$ est* constante *sur chaque* composante connexe *de* $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Image}(\gamma)$.

Exemple 2.14. Pour le lacet $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$, on obtient $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < 1; \\ 0 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$

Chapitre 3

Séries entières

Chapitre 4

Fonctions analytiques

Chapitre 5

Invariance homotopique

Chapitre 6

Résidus