

Leçon 8 : Introduction aux chaînes de Markov

On modélise avec des chaînes de Markov l'évolution au cours du temps d'une quantité X qui peut prendre un nombre fini d'états $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ et qui passe de l'état x_i à l'instant t à l'état x_j à l'instant suivant $t + 1$ avec une probabilité p_{ij} donnée. Les nombres $p_{ij} = P(X_{t+1} = x_j / X_t = x_i)$ vérifient donc $0 \leq p_{ij} \leq 1$ et $\sum_{j=0}^n p_{ij} = 1$ (puisque si la chaîne est dans l'état x_i à un instant, elle sera nécessairement dans l'un des états possibles x_1, \dots, x_n l'instant suivant et donc $p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = 1$).

Pour définir une chaîne de Markov il faut donc deux ingrédients de base :

1. L'espace des états $S := \{x_1, \dots, x_n\}$ connu que l'on supposera fini
2. La matrice de transition (ou de passage)

$$\mathbb{P} = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

A noter que cette matrice est appelée *matrice stochastique* parce que ses coefficients sont tous compris entre 0 et 1 et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 (mais ce n'est pas vrai en général pour les colonnes).

On peut aussi représenter une chaîne de Markov (S, \mathbb{P}) par un *diagramme en points et flèches* comme indiqué par la figure (1) correspondant à l'exemple ci-dessous. Dans ces diagrammes, chaque état est représenté par un point et chaque coefficient p_{ij} non nul de la matrice de transition par une flèche allant de l'état i à l'état j .

1 Un exemple en microfinance

Le modèle suivant est du à une économiste américaine, G. Tedeschi, et il étudie le mécanisme du microcrédit dans une population d'emprunteurs. Dans sa version la plus simple, les individus peuvent être dans deux états, l'état de demandeur (d'un prêt) et celui de bénéficiaire (d'un prêt). On suppose que la seule sanction en cas de non remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt, droit qui, au contraire, est garanti au bénéficiaire lorsqu'il rembourse son prêt. L'objectif est d'étudier l'effet de cette incitation (la garantie d'une reconduction automatique du prêt) sur le taux de remboursement et la répartition entre demandeurs et bénéficiaires au sein de la population. On suppose qu'un bénéficiaire qui investi l'argent emprunté dans une micro entreprise sera en mesure de rembourser son emprunt (et choisira de le rembourser effectivement) avec une probabilité α alors qu'il fera défaut avec une probabilité $1 - \alpha$. En cas de défaut, il redevient simplement demandeur durant la période suivante. Comme demandeur, on suppose qu'il a une probabilité γ de se voir attribuer un prêt et une probabilité $1 - \gamma$ de se le voir refusé.

On introduit donc une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ à deux états $S = \{B, D\}$ et dont la matrice de passage est

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \gamma & 1 - \gamma \end{pmatrix} & \begin{matrix} B \\ D \end{matrix} \end{matrix}$$

d'où le diagramme en points et flèches de la figure (1).

On peut ainsi calculer la probabilité de n'importe quelle succession d'états, appelée *trajectoire* de la chaîne de Markov. Par exemple la probabilité qu'un bénéficiaire à la première période reste bénéficiaire pendant 2 périodes puis revienne demandeur et le reste pendant 2 périodes avant de redevenir bénéficiaire, c'est-à-dire la probabilité de la

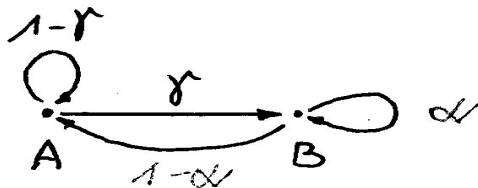


FIG. 1 – Diagramme en points et flèches correspondant à l'exemple de la dynamique de Tedeschi sans période d'exclusion.

succession d'états (B, B, D, D, B) est égale à

$$\begin{aligned} P & (X_0 = B, X_1 = B, X_2 = D, X_3 = D, X_4 = B) \\ &= \pi_0(B)P(X_1 = B/X_0 = B)P(X_2 = D/X_1 = B)P(X_3 = D/X_2 = D)P(X_4 = B/X_3 = D) \\ &= \pi_0(B)p_{11}p_{12}p_{22}p_{21} = \pi_0(h)\alpha(1-\alpha)(1-\gamma)(\gamma) = \alpha\gamma(1-\alpha)(1-\gamma)\pi_0(B). \end{aligned}$$

2 Evolution de la distribution initiale

Mais on ne cherche pas seulement à calculer la probabilité particulière de chaque trajectoire de notre chaîne de Markov, on voudrait plus généralement déterminer l'évolution des proportions des différents états entre le premier et le deuxième instant, entre le deuxième et le troisième, et plus généralement savoir comment vont évoluer ces proportions à l'avenir.

Si l'on connaît la distribution initiale des différents états (c'est-à-dire la proportion d'individus de la population étudiée se trouvant dans chacun des états x_i , que l'on appelle la *loi de probabilité initiale* π_0), l'étude de la chaîne de Markov permet de calculer, à partir de cette répartition

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} S & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline \pi_0 & \pi_0(x_1) & \pi_0(x_2) & \dots & \pi_0(x_n) \end{array}$$

$\pi_0(x_i)$ à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire à partir des nombres $\pi_0(x_i) := P(X_0 = x_i)$, quels états la population va atteindre à l'instant $t = 1$ et avec quelles probabilités π_1 , puis à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. En d'autres termes, on va ainsi calculer la loi π_t pour tous les $t > 0$ et ainsi modéliser la dynamique de cette population.

Voici comment on procède dans l'exemple considéré. Pour calculer les probabilités π_1 des deux états à l'instant $t = 1$, c'est-à-dire pour calculer

$$\pi_1 := (P(X_1 = B), P(X_1 = D)) = (\pi_1(B), \pi_1(D)),$$

on remarque que, du fait de la formule des probabilités totales, $\pi_1(B) = P(X_1 = B/X_0 = B)P(X_0 = B) + P(X_1 = B/X_0 = D)P(X_0 = D)$, ce qui peut s'écrire ici $\pi_1(B) = \alpha\pi_0(B) + \gamma\pi_0(D)$ compte tenu des valeurs des probabilités de transition données par la matrice \mathbb{P} . De même, on vérifie facilement que $\pi_1(D)$ est le produit scalaire du vecteur π_0 avec la deuxième colonne de la matrice \mathbb{P} . Donc le vecteur π_1 est le produit du vecteur π_0 par la matrice \mathbb{P} , ce qui s'écrit simplement $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$, donc

$$(\pi_1(B), \pi_1(D)) = (\pi_0(B), \pi_0(D)) \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix}.$$

Pour une chaîne de Markov d'espace d'états S et de matrice de transition \mathbb{P} , l'évolution au cours du temps de la loi de probabilité initiale π_0 est donnée par $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P} = (\pi_0\mathbb{P})\mathbb{P} = \pi_0\mathbb{P}^2, \dots$ et plus généralement $\pi_t = \pi_{t-1}\mathbb{P} = \dots = \pi_0\mathbb{P}^t$. En particulier, la matrice de transition pour passer de l'état t à l'état $t+2$ est égale à $\mathbb{P} \times \mathbb{P} = \mathbb{P}^2$, et plus généralement, celle pour passer de l'état t à l'état $t+k$ est égale à \mathbb{P}^k . C'est une caractéristique importante des chaînes de Markov que la matrice de transition \mathbb{P} élevée à la puissance k contient les probabilités de transitions de chacun des états vers les autres en exactement k intervalles de temps.

Définition : Une loi de probabilité π sur l'espace des états S est appelée *stationnaire* pour la chaîne de Markov (S, \mathbb{P}) si la chaîne laisse la loi inchangée, c'est-à-dire si l'on a $\pi\mathbb{P} = \pi$.

La *distribution stationnaire d'une chaîne de Markov* est donc une répartition du système entre ses divers états ayant la propriété de rester inchangée au cours du temps. Plus précisément, si les proportions des différents états à l'instant initial sont celles d'une distribution stationnaire, alors ces proportions ne sont plus modifiées ultérieurement par la dynamique de la chaîne de Markov. On peut donc comprendre les distributions stationnaires comme une sorte d'équilibre pour le système. Une chaîne de Markov peut ne posséder aucun équilibre de la sorte, ou bien en posséder un ou plusieurs. Mais ces équilibres, lorsqu'ils existent, n'ont pas tous la même pertinence. Ceux qui vont compter vraiment sont les équilibres vers lesquels on se rapproche inéluctablement lorsque le temps s'écoule, et ce quelque soit la distribution initiale du système. Or si l'on observe les puissances *grandes* de la matrice de transition \mathbb{P} (ce que l'on peut faire facilement avec Scilab par exemple), on peut voir qu'en général, lorsque k augmente, la matrice \mathbb{P}^k se stabilise peu à peu et prend la forme d'une matrice dont toutes les lignes sont (presque) égales.

On peut alors faire la remarque générale suivante : une matrice stochastique (donc nécessairement carrée) $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$ dont toutes les lignes sont égales à un même vecteur ligne L^* vérifie l'égalité $\pi M = L^*$, pour toute distribution π . Comme L^* est lui-même un vecteur dont la somme des coefficients vaut 1 (comme ligne d'une matrice stochastique), cette propriété fait de L^* un bon candidat pour être la distribution stationnaire que l'on recherche c'est-à-dire la distribution d'équilibre vers laquelle le système évolue. Nous verrons pourquoi c'est effectivement la distribution stationnaire recherchée lors du prochain cours.