NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

TP2 en 2011

Calcul Stochastique et applications à la finance
Feuille-réponses du TP 3
Prix d'une option dans un modèle CRR

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignante chargée du TP.

L'objet de cet séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call et celui d'une option Put de pay-off respectifs $\varphi(S) = (S-K)^+$ et $\varphi(S) = (K-S)^+$. Dans un premier temps nous considèrons les Call et les Put à *la monnaie*, c'est-à-dire que l'on supposera leur prix d'exercice égal à $K = S_0$. Rappelons que dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les prix sont modélisés par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\text{up}, \text{down}\}$. On pose à nouveau

$\sigma = 0.2$

$$n = 100 \quad T = 1 \quad \delta t = T/n \quad up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \sigma = 0.4 \quad S_0 = 140.$$

Et on introduit comme dans le TP1 la notation $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$.

Exercice 1. : En utilisant le programme du TP1, recalculer les valeurs de SS pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ et $j \in \{0, \ldots, i\}$.

1. Rappeler ici les lignes de code utilisées.

```
SS = zeros(n+1, n+1);
SS (1+0, 1+0) = SØ
for i = 1:n
   SS(1+i,1+0) = SS(1+i-1, 1+0)*down; // ici j=0
   for j = 1:n
      SS(1+i,1+j) = SS(1+i-1, 1+j-1) * up;
   end;
end;
```

Attention bug corrigé

2. Les valeurs de $SS(6,2)$, $SS(11,6)$ et $SS(100,50)$ sont-elles plus grandes ou plus petites que $S0$. Expliquer pourquoi.

131,85

$SS(6,2) = \underline{124,169} < S_0$ $\quad SS(6,2) = SS(1+5, 1+1) = S(5,1)$

donc sur 5 pas il y a 1 "up" donc 5 "down" ce qui explique que $SS(6,2) < S_0$.

idem

$SS(11,6) = 140 = S_0$ $\quad SS(11,6) = SS(1+10, 1+5) = S(10,5)$

donc sur 10 pas il y a 5 "up" donc 5 "down" ce qui explique que $SS(11,6) = S_0$.

137,23

$SS(100,50) = \underline{134,510}$ $\quad SS(100,50) = SS(1+99, 1+49) = S(99,49)$

donc sur 99 pas il y a 49 "up" donc 50 "down" ce qui explique que $SS(100,50) < S_0$

3. Quelles valeurs trouvez-vous pour SS lorsque la volatilité σ est nulle ? Expliquez pourquoi.

On voit que toutes les valeurs non nulles de SS sont égales à S0 = 140 ; ceci s'explique par le fait que up = 1 = down

A noter que $p = \dfrac{R - down}{up - down}$ n'est pas défini dans ce cas (division par zéro)

Exercice 2. : On sait que le prix $c(t, S_t)$ d'un portefeuille de couverture d'une option ayant pour pay-off φ et de date d'exercice T peut se calculer par récurence rétrograde : on connait c à l'instant T puisque $c(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis, pour tous les $0 \le t \le T - \delta t$, on pose $c(t, S_t) = (pc(t+\delta t, S_t u) + (1-p)c(t+\delta t, S_t d))/R$ où p est la probabilité risque neutre et R le coefficient d'actualisation. En notant $C(i,j) := c(i\delta t, S(i,j))$, on a donc, pour $i = n$ $C(n,j) = \varphi(S(n,j))$, puis pour $0 \le i \le n-1$ $C(i,j) = (pC(i+1, j+1) + (1-p)C(i+1,j))/R$. On va à présent utiliser cette récurrence rétrograde pour calculer le prix d'un Call à la monnaie.

1. On revient à une volatilité non nulle $\sigma = 0.4$. Sous scilab, pour le même raisons que pour S, on posera CC(1+i,1+j)=$C(i,j)$.
   Compléter le code Scilab ci-dessous calculant les valeurs CC(i,j) d'une option Call d'échéance $T = 1$ dans un modèle à $n = 100$ étapes (3 lignes incomplètes).

```
r=0.1;R=exp(r*delta_t);K=S0;
p=(R-down)/(up-down);
function phi=phi(S);
phi=..max(S-K,0)..; // pour un call φ(S)=(S-K)+
endfunction;
CC=zeros(n+1,n+1);
for j=0 :n
CC(1+n,1+j)=.phi(SS(1+n,1+j));
end;
for i=n-1 :-1 :0
for j=0 :i
CC(1+i,1+j)=.(p*CC(1+i+1,1+j+1)+(1-p)*CC(1+i+1,1+j))/R ;
end;
end;
```

2. Quelle valeur trouvez vous pour la *prime* $c(0,0) = CC(1,1)$ d'un Call à la monnaie ?

18,55 $c(0,0) = CC(1,1) = \underline{28,391624}$

la volatilité $\sigma = 0.2$ est plus faible : le Call est moins cher.

Exercice 3. :
Reprendre les deux dernières questions pour un Put à la monnaie.

```
function psi = psi(S);
psi = max(K-S,0); // pour un put ψ(S)=(K-S)+
endfunction;
(----)
PP(1+n,1+j)=psi(SS(1+n, 1+j));

(----)
PP(1+i,1+j)= (p* PP(1+i+1,1+j+1) + (1-p)* PP(1+i+1,1+j))/R;
```

5,22 on trouve $p(0,0) = PP(1,1) = \underline{15,068863}$

la volatilité $\sigma = 0,2$ est plus faible: le Put est moins cher

Exercice 4. : On peut démontrer que sous des hypothèses très générales on à la *relation de parité Call-Put*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

1. Vérifier numériquement que cette relation est bien vérifiée pour un modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour $t = 0$, $T = 1$, $n = 100$, $S_0 = 140$, $K = S_0$, $\sigma = 0.40$ et $r = 0.1$

$C_0 - P_0 = CC(1,1) - PP(1,1) = 13,322761$

$S_0 - Ke^{-r(T-0)} = S\emptyset - K * exp(-r*T) = 13,322761$

Les deux nombres sont bien égaux.

idem cas indépendant de σ

2. On définit la matrice AActuK par le code suivant :

```
for i=0 :n
    for j=0 :i
        AActuK(i+1,j+1)=K*exp(-r*(T-i*delta_t));
    end;
end;
```

Que représente en termes d'actualisation le nombre AActuK(i+1,j+1) ? Dépend-il de la valeur de j ?

$AActuK(i+1, j+1) = Ke^{-r(T-i\delta t)} = Ke^{-r(T-t)}$: c'est la valeur, actualisée à l'instant $t = i\delta t$, de K détenu à l'instant T

Cette valeur est indépendante de j

3. On définit MaxAbsRelCP par MaxAbsRelCP=max(abs(CC-PP-SS+AActuK));

Si la relation de parité Call-Put est satisfaite, que vaut MaxAbsRelCP ? Expliquez.

Si la relation Call-Put est satisfaite on doit avoir CC-PP = SS-AActuK et donc MaxAbsRelCP = max(abs(CC-PP-SS+AActuK)) = max(zeros(n+1,n+1)) = 0

$4.69 \cdot 10^{-13}$

Mais on trouve $1,933D-12 = 1,933 \cdot 10^{-12}$ qui est petit mais non nul

Explications : le calculs ont effectués en double précision avec des erreurs d'arrondi ces erreurs ne sont pas visibles dans l'affichage en simple précision de $C_0 - P_0$ et $S_0 - Ke^{-rT}$

4. Quelle valeur trouvez-vous pour MaxAbsRelCP ? Expliquez et commentez.

Mais on trouve Max Abs Rel CP $= 1,933D-12 = 1,933 \cdot 10^{-12}$ qui est petit mais non nul. Explications : les calculs ont effectués en double précision avec erreurs d'arronds. Ces erreurs ne sont pas visibles dans l'affichage en simple précision de $C_0 - P_0$ et $S_0 - e^{-rT}$, mais lorsqu'on fait la différence l'affichage passe en notation décimale et virgule flottante qui révèle la petite différence

5. Etudier comment varie le prix d'un Call en fonction de son prix d'exercice K : faites le calcul à *la monnaie* c'est-à-dire pour $K = S0$ puis recommencer pour d'autres valeurs de K, $K = S0 - 10$, $K = S0 + 10$, etc... Expliquez.

K	130	140	150	
C	33,45	28,39	24,05	$\sigma = 0.4$
	25.08	18.55	13.25	$\sigma = 0.2$

A l'instant final, le payoff d'un call $\varphi(S) = (S-K)^+$ est une fonction décroissante de la valeur de K.

Il doit donc en être de même à tout instant $t \leq T$ sinon on pourrait réaliser un arbitrage : Si à l'instant t $C_t^{K^-} < C_t^{K^+}$ pour $K^- < K^+$ il suffit d'acheter $C_t^{K^-}$ et vendre $C_t^{K^+}$

6. Reprendre la question précédente dans le cas d'un Put. Expliquez.

K	130	140	150	
P	11.08	15,07	19,77	$\sigma = 0.4$
	2.71	5,22	8.98	$\sigma = 0.2$

A l'instant final le payoff d'un Put $\psi(S) = (K-S)^+$ est une fonction croissante de la valeur de K. Il doit donc en être de même pour tout $t \leq T$