Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3 MASS, année 2010-2011
Calcul Stochastique et finance (semestre 2)
Date : .
Groupe : .

Feuille-réponses du TD 11
Modèle de Tedeschi sans période d'exclusion

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : modèle simplifié de Tedeschi, sans exclusion

1.- On considère un modèle de Tedeschi simplifié, sans temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et le renvoi dans le statut de demandeur. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B. On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité $1-\alpha$ de ne pas rembourser son prêt : dans ce cas il redevient demandeur, a donc une probabilité $\alpha\gamma$ de redevenir bénéficiaire qui rembourse son prêt, on dit qu'il devient B^+. Sinon il devient demandeur (non bénéfiaire) et on le note D

1. Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov a deux état B^+ et D correspondant à ce modèle.

2. Ecrire la matrice de *passage* P (ou de *transition*) de cette chaîne.

3. trouver son vecteur propre à gauche unitaire π^* associé à la valeur propre 1 : c'est une distribution d'équilibre de la chaîne.

4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, P^n tend vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π^*. Application numérique : choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.50$; calculer π^* et P^{50}.

5. Recommencer avec $\alpha = 0.97$ et $\gamma = 0.10$. Qu'observez-vous ?. Calculer P^{500} ; qu'observez-vous ?

6. On revient au cas général α, γ. Rappelons que $X_t \in \{B+, D\}$ et $X_{t+\varepsilon} \in \{B, D\}$, et donc que $\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = B) = \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = B|X_t = B^+)\mathbb{P}(X_t = B^+) + \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = B|X_t = D)\mathbb{P}(X_t = D)$. A l'équilibre, qu'elle est la proportion de bénéficiares (B) et de demandeurs.

2.- On distingue à présent deux types de demandeurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de remboursement respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est que l'emprunteur perd le statut de bénéficiaire et redevient demandeur, toujours avec un proba γ de devenir bénéficiare. La probabilité qu'un bénéficiaire tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée β

1. Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov a trois états S^+, D et R^+ correspondant à ce modèle.

2. Ecrire la matrice de passage Q de cette chaîne.

3. Application numérique : $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.88$, $\beta = 0.50$ $\gamma = 0.30$; calculer Q^{50} et π^*.

4. Recommencer avec $\alpha_S = 0.98$, $\alpha_R = 0.96$ et $\gamma = 0.50$.

5. pour ces deux cas, trouver une probabilité α du premier modèle donnant, à l'équilibre π^*, la même proportion de demandeurs (bénéficiaires ne remboursant pas).