Chapitre 8

Black-Scholes comme limite de CRR

Si l'on se pose la question de savoir si l'on a déjà vu une formule de mathématique publiée dans un journal grand public, on réalise que la réponse est très probablement "non" (on pense éventuellement à $E = mc^2$ mais c'est une formule de physique). Pourtant en 1997, lorsque Black, Scholes et Merton reçurent le prix Nobel d'économie, la formule, connue aujourd'hui sous le nom de *formule de Black-Scholes*, fit la une du New York Times, signe de l'importance qu'elle avait (et a encore) pour le monde de la finance.

8.1 La formule de Black-Scholes

Voici cette formule dans le cas d'un Call (Européen) :

$$C_0 = S_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K e^{-rT} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \tag{8.1}$$

où $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Elle donne le prix à l'instant initial (la prime) d'un Call Européen de date d'exercice T et de prix d'exercice K sur un actif sous jacent de prix initial S_0, de volatilité σ, sachant que le taux sans risque est r. On notera que d_1 et d_2 sont des constantes qui vérifient $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Cette formule permet de calculer la prime du Call dès lors qu'on se donne les constantes T, K, S_0, σ et r dont elle dépend.

On la réécrit souvent en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\mathcal{N}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Elle s'écrit alors plus simplement $C_0 = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$.

La formule correspondante pour une option Put (Européen) de mêmes paramètres est

$$P_0 = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1). \tag{8.2}$$

A partir de ces deux expressions de prix de Call et de Put, on peut vérifier là encore la relation de parité Call-Put en utilisant les propriétés de symétrie de la loi normale, plus précisément en utilisant que l'on a $\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$ pour tout x.

8.2 Limite du prix CRR

On a vu que dans un modèle Cox, Ross et Rubinstein, la prime d'un Put (Européen), tout comme celle d'un Call, est égale à l'espérance, sous la probabilité risque neutre, du payoff actualisé :

$$P_0(n) = e^{-rT}\mathbb{E}\varphi(S_T)$$

où φ désigne ce payoff qui, dans le cas du Put, vaut $\varphi(S) = (K - S)^+$. Cette formule CRR permet, tout comme la formule de Black-Scholes, de calculer la prime du Put dès que l'on s'est donné les constantes T, K, S_0, σ et r. La principale différence est que le prix dépend cette fois, en plus de ces constantes, du nombre n de pas de discrétisation de l'intervalle $[0, T]$. D'où la notation adoptée à présent, $P_0(n)$. L'objet de ce paragraphe est de montrer que, lorsque n tend vers l'infini, la limite de $P_0(n)$ existe et qu'elle est précisément égale au prix Black-Scholes (formule (8.2)), c'est-à-dire de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((K-S_T)^+) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1). \tag{8.3}$$

L'équivalent, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((S_T-K)^+) = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$ est vrai aussi dans le cas d'un Call et découlera du cas du Put en appliquant la relation de parité Call-Put. Le choix que nous faisons d'étudier ce passage à la limite dans le cas du Put apparaîtra plus loin.

Désignons par Z une v.a. prenant les deux valeurs -1 et $+1$ avec les probabilitéss $1-p$ et p respectivement, où p est la probabilité risque neutre (égale à $\frac{R-d}{u-d}$, où $R = e^{r\delta t}$, $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$). A noter que dans ce cas la loi de Z dépend de n puisque $\delta t = \frac{T}{n}$ est fonction de n. On peut alors réécrire dans le modèle CRR la v.a. S_T, donnant le prix en $t = T$ de l'actif sous-jacent, de la façon suivante : étant donnée une suite de v.a. Z_1, Z_2, ...Z_n indépendantes et ayant la même loi que Z, S_T est égal à

$$S_T = S_0 e^{Z_1\sigma\sqrt{\delta t}} e^{Z_2\sigma\sqrt{\delta t}}, \ldots, e^{Z_n\sigma\sqrt{\delta t}} = S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\tilde{Z}_n}$$

où $\tilde{Z}_n$ la v.a. $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Z_n$. Donc si l'on pose $f(z) = (K - S_0e^{\sigma\sqrt{T}z})^+$, la limite que l'on veut calculer $\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((K-S_T)^+)$ s'écrit simplement

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((K-S_T)^+) = \lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}(f(\tilde{Z}_n)). \tag{8.4}$$

où f est la fonction définie précédemment qui est à la fois continue et bornée. Nous allons voir que cette dernière propriété de f est importante et on peut noter qu'elle ne serait plus vraie pour un Call (puisque dans ce cas le payoff n'est pas borné).

On a le résultat suivant :

Proposition 8.1 *Soient T, r, σ des constantes strictement positives, $\delta t = \frac{T}{n}$, et R, d et u les quantités $R = e^{r\delta t}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$. Soit Z_1, Z_2, ...Z_n une suite de v.a. indépendantes prenant deux valeurs -1 et $+1$ avec les probabilités $1-p$ et p respectivement où p est la fonction de n donnée par $p = \frac{R-d}{u-d}$. Alors la suite $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Z_i$ converge en loi vers une v.a. de la forme $\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2}) + \tilde{Z}$, où $\tilde{Z}$ suit une loi normale centrée et réduite.*

Rappelons que, par définition, une suite de v.a. $\tilde{Z}_n$ *converge en loi* vers $\tilde{Z}$ si et seulement si, pour toute fonction f continue et bornée, on a $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(f(\tilde{Z}_n)) = \mathbb{E}(f(\tilde{Z}))$. C'est cette caractéristique qui explique le choix du Put plutot que celui du Call pour établir la convergence du prix CRR vers le prix BS.

Preuve : Mais nous n'allons pas utiliser cette définition de la convergence en loi pour prouver cette proposition. En effet, on sait aussi qu'il est équivalent de montrer que $\tilde{Z}_n$ converge en loi vers $\tilde{Z}$ ou que la *fonction génératrice des moments* de $\tilde{Z}_n$, $M_{\tilde{Z}_n}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tilde{Z}_n}\tau)$, converge vers celle de $\tilde{Z}$, $M_{\tilde{Z}}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tilde{Z}}\tau)$. Or pour calculer la fonction génératrice des moments de $\tilde{Z}_n$, comme

$$M_{\tilde{Z}_n}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tilde{Z}_n}\tau) = \mathbb{E}\left(e^{(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)\frac{\tau}{\sqrt{n}}}\right) = M^n_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right),$$

il suffit de calculer celle de la v.a. Z au point $\frac{\tau}{\sqrt{n}}$. Or Z ne prend que les deux valeurs -1 et $+1$ avec les probabilités $1-p$ et p et vaut donc simplement

$$M\tilde{Z}(\frac{\tau}{\sqrt{n}}) = (1-p)e^{-\frac{\tau}{\sqrt{n}}} + pe^{\frac{\tau}{\sqrt{n}}}.$$

En se souvenant que $p = \frac{R-d}{u-d}$ avec $R = e^{r\delta t}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, on vérifie facilement que

$$p = \frac{1}{2} + \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\delta t}(1+\varepsilon(\sqrt{\delta t}))$$

$$1-p = \frac{1}{2} - \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\delta t}(1+\varepsilon(\sqrt{\delta t}))$$

où les $\varepsilon(\sqrt{\delta t})$ désignent des fonctions qui tendent vers 0 quand δt tend vers 0 (et donc quand n tend vers $+\infty$). Comme on a aussi

$$e^{\frac{\tau}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})$$

et

$$e^{-\frac{\tau}{\sqrt{n}}} = 1 - \frac{\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n}),$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{n}) = 0$, il en résulte que

$$M_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\tau^2 + 2\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\tau\sqrt{T} + \varepsilon(\frac{1}{n})\right)$$

et donc que

$$M^n_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(n\ln(M_{\tilde{Z}}(\frac{\tau}{\sqrt{n}}))\right) = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \varepsilon(\frac{1}{n}).$$

Lorsque n tend vers l'infini (et donc $\varepsilon(\frac{1}{n})$ vers 0), on a bien à la limite la fonction génératrice des moments d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2}), 1)$. D'où la proposition. $\square$

Remarque : Notons que si les Z_n avaient été identiquement distribués, c'est-à-dire de même loi (indépendante de n), ce qui n'est pas le cas ici, on aurait pu utiliser le théorème de la limite central pour trouver la loi limite de $\tilde{Z}_n$. En effet, selon ce théorème, si μ et s^2 désignent l'espérance et la variance des Z_i (des constantes si les loi des Z_i sont identiques et indépendantes de n), la suite de v.a. $\frac{\tilde{Z}_n - n\mu}{s\sqrt{n}}$ converge en loi vers une v.a. Z_0 de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Ce qui empèche l'application du théorème de la limite centrale ici est le fait que la suite de v.a. Z_1, Z_2, ...Z_n n'est pas *une* suite i.i.d. mais ce que l'on appelle un *vecteur triangulaire* en ce sens que, pour chaque n, la suite Z_1, Z_2, ...Z_n est bien i.i.d. mais lorsque n varie, la suite change à la fois de longueur mais aussi de loi. Mais, à défaut de pouvoir utiliser le théorème de la limite central, on reprend l'idée de sa preuve pour en généraliser l'énoncé à le cas qui nous intéresse ici.

8.3 Convergence vers Black-Scholes

Pour vérifier que la limite du prix CRR est bien le prix Black-Scholes, il reste à vérifier que, si Z_0 est une v.a. normale centrée réduite et si $f(z) = (K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z})^+$, on a bien

$$e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1).$$

Cela découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) &= e^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(K - S_0 e^{\sigma\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}}(\sqrt{n}z + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{n})}\right)^+ e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= e^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(K - S_0 e^{\sigma\sqrt{n}z}e^{T(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right)^+ e^{-\frac{z^2}{2}}dz \end{aligned}$$

On peut vérifier que la quantité $S_0 e^{\sigma\sqrt{n}z}e^{T(r-\frac{\sigma^2}{2})} < K$ si et seulement si $z < -d_2$. D'où

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) &= e^{-rT}K\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{\sigma\sqrt{n}z + T(r-\frac{\sigma^2}{2}) - \frac{z^2}{2}}dz\right) \\ &= e^{-rT}K\mathcal{N}(-d_2) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right) \end{aligned}$$

en faisant dans le second terme le changement de variable $y = z - \sigma\sqrt{T}$ pour lequel il est facile de voir que $z \in]-\infty, -d_2]$ si et seulement si $y \in]-\infty, -d_1]$. D'ou la formule cherchée

$$e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) = e^{-rT}K\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1).$$

Remarque : Il est intéressant de noter qu'on peut réécrire la formule de prix du modèle CRR de façon à faire apparaître, comme pour la formule de Black-Scholes deux termes, que l'on peut lire comme la composition du portefeuille de couverture, le premier terme (en revenant au cas du Call) étant la partie inverstie en actif sous jacent et le second celle investie en actif non risqué (ou en cash). Sous cette forme on l'appelle la *formule exacte* de Cox, Ross et Rubinstein. Pour le voir, notons k l'entier défini par $k := \mathrm{Min}\{\ j \in \mathbb{N}\ \mid\ S_0 u^j d^{n-j} > K\ \}$ et désignons par Φ la *somme binomiale incomplète* définie par $\Phi(k,n,p) := \sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{n-j}$. On a

$$\begin{aligned}
C_0(n) &= e^{-rT}\mathbb{E}(S_T - K)^+ = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j}-K)^+ \\
&= e^{-rT}\sum_{j=k}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j}-K) \\
&= S_0e^{-rT}\sum_{j=k}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(up)^j(d(1-p))^{n-j} - Ke^{-rT}\sum_{j=k}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j} \\
&= S_0\sum_{j=k}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{n-j} - Ke^{-rT}\sum_{j=k}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^{*j}(1-p^*)^{n-j} \\
&= S_0\Phi(k,n,q) - Ke^{-rT}\Phi(k,n,p)
\end{aligned}$$

où l'on a défini q par $q = upe^{-r\delta t}$. Il convient de vérifier que l'on a bien $1-q = d(1-p)e^{-r\delta t}$ et aussi que $0 < q < 1$. Ceci découle de la relation de martingale $S = e^{-r\delta t}(pSu + (1-p)Sd)$, du fait que $0 < p < 1$ et aussi des inégalités d'absence d'opportunité d'arbitrage $0 < d < e^{r\delta t} < u < 1$.

En fait, il est aussi possible de montrer directement que $\lim \Phi(k,n,q) = \mathcal{N}(d_1)$ et $\lim \Phi(k,n,p) = \mathcal{N}(d_2)$ et d'obtenir ainsi directement la formule de Black-Scholes comme limite de la formule exacte de Cox, Ross et Rubinstein.

8.4 Vitesse de convergence

Sachant que la limite du prix Cox, Ross et Rubinstein est égale au prix Black-Scholes, on peut se demander comment se comporte le premier tend vers le second lorsque n tend vers l'infini. La convergence est-elle monotone, ou non, et surtout est-elle rapide ?

Si l'on représente sur un graphe du prix $C_0(n)$ comme une fonction de n, on s'aperçoit (voir la figure ci dessous) que la convergence est très irrégulière et qu'elle ne semble pas particulièrement rapide. En réalité, on peut montrer que

$$C_0(n) - C_{BS} = \varepsilon(\frac{1}{n})$$

c'est-à-dire que cet écart tend vers zéro comme $\frac{1}{n}$, ce qui est assez rapide (dans le cas du théorème de la limite centrale, on attend plutôt une convergence en $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

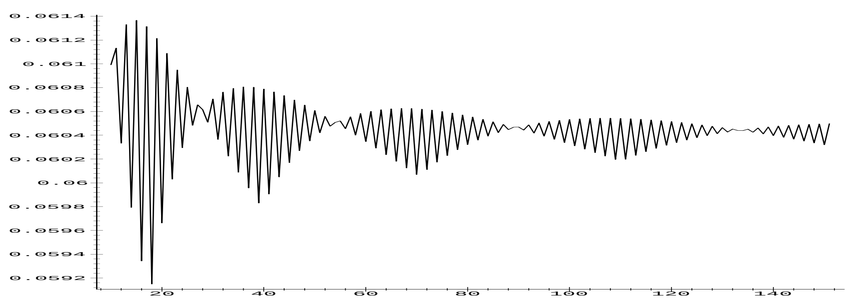

FIG. 8.1 – Tracé du prix Cox, Ross et Rubinstein $C_0(n)$ d'un Call Européen en fonction de n et de sa limite, le prix Black-Scholes.