NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Finance mathématique : Feuille de réponses du TP 1
La marche de Wiener

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. **:** Soit $\Omega = \{-1\ ; +1\}^n$. On considère une suite de v.a. X_1, X_2, ... , X_n définies sur Ω, indépendantes ayant toutes la même loi ; une loi de Bernoulli, $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1 - p$. On dit alors qu'elles sont *i.i.d.* pour *indépendantes et identiquement distribuées.*

1. Rappeler ce que l'on entend par famille de v.a. indépendantes.

2. Pour tout $i = 0, \ldots, n$, on pose $Y_i = 2X_i - 1$. Vérifier que les Y_i forment aussi une famille *i.i.d.*. Quelle est leur loi ?

Exercice 2. : Soient Ω et $(Y_i)_{i=0..n}$ comme ci dessus, soient $\delta t > 0$ un nombre réel et $\mathbb{T} = \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t\}$. On appelle *Marche aléatoire de Wiener* la suite de v.a. $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ telle que $W_0 = 0$ et pour tout $t \geq \delta t$, $W_{t+\delta t} - W_t = Y_{t/\delta t}\sqrt{\delta t}$.

1. Pour $t = \delta t$, décrire la loi de $W_{\delta t}$ et calculer $\mathbb{E}(W_{\delta t})$.

2. Même question pour $t = 2\delta t$ et $t = 3\delta t$.

3. A tout $\omega \in \Omega$ correspond une *trajectoire* de la marche aléatoire

$$W_t = \{W_0, W_{\delta t}(\omega), \ldots, W_{n\delta t}(\omega)\}.$$

Décrire l'ensemble des trajectoires lorsque $n = 2$ (combien y-en-a-t-il ? faire un dessin), puis lorsque $n = 3$.

Exercice 3. **:**On suppose à présent que $n = 4$. Soient $T = n\delta t$ et Φ la v.a. sur Ω définie par $X = \text{Max}\,(W_T, 0)$. Calculer $\mathbb{E}(\Phi)$, puis $\mathbb{E}(\Phi/W_{\delta t} = \sqrt{\delta t})$.