L3 MASS S6 | Processus stochastiques et finance
2007-2008

Feuille d'exercices n°4

Exercice 1. On considère un espace probabilisé (Ω, P) muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, N)$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $0 \leq n \leq N$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable (i.e. X_n est constante sur les atomes de $\mathcal{F}_n$). On dit que la suite (X_n) est une $\mathcal{F}$-*martingale* si $X_n = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$.

1.1. Montrer que si (X_n) est une martingale alors $X_n = E(X_N|\mathcal{F}_n)$.

1.2. Montrer que si (X_n) est une martingale alors $E(X_n) = E(X_0)$.

1.3. Soit Y une variable aléatoire. On pose $X_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$. Montrer que (X_n) est une martingale (appelée martingale de Doob associée à la v.a. Y).

1.4. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \cdots, N\}$. Soit (X_n) une martingale. On note $n \wedge T$ la variable aléatoire $\min(n, T)$. Soit $X_{n\wedge T}$ la variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par : $X_{n\wedge T}(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega)$. Montrer que si T est un temps d'arrêt alors la suite $(X_{n\wedge T})$ est une martingale. *Indication* : écrire $X_{n\wedge T} = X_n I_{\{T>n-1\}} + X_T I_{\{T\leq n-1\}}$.

1.5. En déduire que $E(X_T) = E(X_0)$.