NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Calcul stochastique : feuille de réponses du TP 5
Calcul du prix d'une option barrière

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $n = 10$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 150$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab en commençant par y recopier la définition de SS et celle de CC utilisée dans les TP précédents. Avant de l'exécuter, modifier les valeurs des constantes.

Combien vaut l'actif sous-jacent après 10 "down" ? Combien après 6 "down" et 4 "up" ? Combien vaut le Call à la monnaie ($K = S_0$) à l'instant t=0 ? Combien vaut-il à l'instant $t = \frac{1}{2}$ si l'actif sous-jacent n'a eu que des "up" ?

Exercice 2. : On rappelle qu'une option DIC est une option Call qui ne prend sa valeur à l'instant final T que si le cours de l'actif sous-jacent est passé en dessous d'une barrière.

Pour calculer la valeur d'une option DIC (on prendra ici la barrière égale à $L = 100$), on va utiliser, comme pour un Call vanille, sa définition

$$DIC_0 = \mathbb{E}\left(\varphi(S_T)\mathbb{I}_{\tau_L<T}\right)$$

en programmant le calcul de cette espérance par récurrence retrograde. On procède de la façon suivante. Mais pour prendre en compte l'indicatrice $\mathbb{I}_{\tau_L<T}$, on ajoute aux deux variables i et j usuelles une troisième variable notée k qui vaut 0 ou 1 selon que $\mathbb{I}_{\tau_L<T}$ vaut 0 ou 1. La fonction $sousL(i,j)$ est une fonction qui vaut 1 lorsque l'on est sous la barrière et 0 si l'on est au dessus et on l'utilise de la façon suivante. En $t = T$, l'option vaut $\varphi(S_T)$ lorsque $k = 1$ et elle vaut 0 sinon. Donc

$$DICC(n,j,1) = \varphi(SS(n,j)) \quad , \quad DICC(n,j,0) = 0.$$

Lorsque $t < T$, l'option est égale à l'espérance actualisée de ses deux valeurs suivantes (comme pour un Call vanille) et la troisième variable k passe de 0 à 1 (ou reste en 0 ou reste en 1) selon que l'on franchit la barrière ou non. On a donc :

$$DICC(i,j,k) = e^{-rT}\left(pDIC(i+1,j+1,k') + (1-p)DIC(i+1,j,k')\right)$$

où $k' = \max(k, sousL(i,j))$ reste égale à k si la barrière n'est pas franchie à l'étape $i+1$ ou prend la valeur $k+1$ si elle est franchie.

Saisir le code correspondant (voir ci dessous) et expliquer pourquoi l'un des terme $\max(k, sousL(i,j))$ qui y figure n'est pas nécessaire et aurait pu être remplacé par k.

1. Indiquer la valeur trouvée pour la DIC puis étudier comment varie son prix lorsque L se rapproche de S_0. Comment pouvez-vous l'expliquer ?

2. Modifier le programme précédent (on en fera une copie auparavant) pour calculer le prix d'une option DOC. Comparer les trois quantités Call, DIC et DOC à divers instants et commenter.

3. Reprendre les deux questions précédentes pour des options DIP et DOP.

```
//////Indicatrice de la région sous la barrière///////
function indi=sousL(i,j);
      if SS(i+1,j+1)<=L then indi=1;
      else indi=0;
      end;
endfunction;
//////Calcul des valeurs de la DIC
DICC=zeros(n+1,n+1,2);
for j=0 :n
      for k=0 :1
            if k==1 then DICC(n+1,j+1,k+1)=phi(SS(n+1,j+1));
            else DICC(n+1,j+1,k+1)=0;
            end;
      end;
end;
for i=n-1 :-1 :0
      for j=0 :i
            for k=0 :1
            DICC(i+1,j+1,k+1)=(p*DICC(i+1+1, j+1+1, max(k, sousL(i,j+1))+1) + (1-p)*DICC(i+1+1,
j+1, max(k, sousL(i+1,j))+1))/R;
            end;
      end;
end;
```