Finance Stochastique 2011-12

NOM :
PRENOM : Corrigé

Groupe :

2011-2012.

TP2 : Trajectoires d'un modèle CRR à n étapes

Exercice 1. : Calculer à l'aide du code du TP1 la marche de Wiener $W(i,j)$ et la marche CRR $S(i,j)$. On prendra cette fois $n = 50$, $S0 = 130$ et $\sigma = 0.4$. Quelles valeurs sont atteintes par ces deux marches en $T = n\delta t$ s'il y a eu 20 up ? Même question en $t = 30\delta t$?

WW(51,21) = −1,4142 WW(31,21) = 1,4142 et SS(51,21) = 73,836… SS(31,21) = 228,885..

Exercice 2. : **Tracé d'une trajectoire** Une trajectoire de la marche CRR est caractérisée par une suite de up,down que nous représentons par une suite de 1 et de 0. On appelle $J(i)$ la fonction qui donne pour une trajectoire le nombre de up entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = i\delta t$. Ainsi pour la trajectoire donnée par la suite 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, $J(2) = J(5) = 2$ et $J(6) = 3$.

1. Saisir le code suivant :

```
deltaJ=[0 1 1 0 1 1 0 1 1] ;
J=cumsum(deltaJ) ;
Traj=zeros(1,n+1) ;
Traj(1)=SS(1,1) ;
for i=1 :n
Traj(i+1)=SS(i+1,J(i)+1) ;
end ;
plot2d(0 :9,Traj) ;
```

deltaJ : suite de 0 et de 1 modélisant une suite de up et de down

J : [0 1 2 2 3 4 4 5 6] ← compte le nb de up effectués à chaque instant

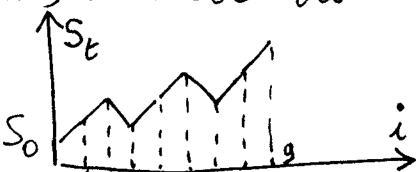
Traj=zeros(1,n+1) ← initialise un vecteur de taille n+1 dont toutes les composantes sont nulles

choisi de partir de SS(1,1) et ensuite la i ème composante vaut SS(i+1,J(i)+1) qui est la valeur de S après J(i) up.

plot2d ← tracé de la trajectoire définie juste avant.

Ce code utilise l'instruction cumsum. En vous aidant de l'aide en ligne de Scilab, indiquer ce que fait cette instruction. Puis expliquer, ligne après ligne, ce que fait ce code.

Cumsum est un vecteur de même taille dont les composantes sont les somme cumulées des composantes précédentes.



2. Tracer plusieurs trajectoires en changeant le nombre de pas de temps n et la suite des 0 et 1. Pour $n = 6$, quelle valeur est atteinte par une trajectoire pour laquelle la succession des 0 et 1 est toujours égale à 0 ? Toujours égale à 1 ? est une alternance régulière de 0 et de 1 ? Expliquez.

On pose n = 6 et on recalcule SS.
On obtient SS(7,1) = 92,5846.. (aucun up) deltaJ=[0.. 0]
SS(7,7) = 182,535.. (aucun down) =[1…1]
SS(7,4) = 130 = S_0 (deltaJ=[0 1 0 1 0 1]

Exercice 3. : **Simulation d'une suite de 0 et de 1**

1. La fonction rand() de Scilab (comme la touche random d'une calculette) renvoit un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, distribué selon une loi uniforme sur $[0,1]$. La fonction 0.5+rand() renvoit encore un nombre aléatoire, mais il n'est plus distribué selon une loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle loi de probabilité est simulée par cette fonction.

Comme rand( ) renvoie un nombre compris entre 0 et 1 et uniformement distribué sur cet intervalle [0,1], 0,5+rand( ) renvoie donc un nombre compris entre 0,5 et 1,5 mais qui sera aussi unif^t distribué sur [0,5 ; 1,5]. Donc la loi de proba est $\mathcal{U}[0{,}5 ; 1{,}5]$.

2. Si l'on précise `rand(m,n)`, on obtient une matrice de taille $m \times n$ dont toutes les composantes sont des nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais pour diverses (petites) valeurs de m et de n. Expliquez ce que font les deux instructions suivantes :
`x=rand(1,1000);histplot(10,x);`

renvoie un vecteur de taille 1000 dont toutes les composantes sont unif^t distribuées sur $[0,1]$.
histplot trace l'histogramme de ces 1000 composantes du vecteur x en choisissant un nombre de classes égale à 10.

3. En vous aidant éventuellement de l'aide en ligne de Scilab, indiquer ce que fait l'instruction `int`.

Int(x) retourne un entier qui est la partie entière de x si x est un nombre positif (si $x<0$, c'est l'entier "suivant")
Exemple Int(2,5) = 2 Int(−2,5) = −2.

4. La fonction `int(0.5+rand())` renvoit un nombre aléatoire. Quelles valeurs observez-vous? Expliquez quelle loi est simulée par cette fonction.

Comme 0,5+rand() est un nombre compris entre 0,5 et 1,5, sa partie entière sera 0 s'il est inférieur strictement à 1 et elle vaudra 1 si ce nombre est supérieur à 1.
Donc int(0,5+rand()) retourne 0 ou 1 avec une probabilité $p=\frac{1}{2}$ de retourner 0. int(0,5+rand()) $\rightsquigarrow \mathcal{B}(1,\frac{1}{2})$ (loi de Bernoulli)

Exercice 3. :

1. On souhaite à présent simuler un nombre M de trajectoires de la marche CRR en utilisant la commande `rand(n,M,'uniform')` qui retourne une matrice `nxM` de nombres aléatoires uniformément distribués sur $[0, 1]$. Que retourne `int(0.5+rand(n,M))`, à votre avis?

int(0,5+rand(n,M)) retourne une matrice n×M (n lignes et M colonnes) dont toutes les composantes sont égales à 0 ou à 1 avec une proba $\frac{1}{2}$ de valoir 0.
Chaque colonnes représente une trajectoire.

2. Et, si l'on pose `deltaJ=int(0.5+rand(n,M))`, que retourne `cumsum(deltaJ,"r")` ?

cumsum(deltaJ, "r") est une matrice de même taille que deltaJ dont les colonnes sont des sommes cumulées des colonnes de deltaJ.

3. On suppose $n = 100$. Simuler $M = 40$ trajectoires en choisissant $p = 0.5$. En reproduisant la simulation avec d'autres valeurs de la volatilité σ, étudier et expliquer l'influence de ce paramètre sur la forme des trajectoires.

Plus σ est grand, plus les trajectoires s'étalent et "s'agitent".

Exercice 6. : Simuler de même M trajectoires de la marche de Wiener et comparer avec les trajectoires de CRR.

Au contraire si σ est très petit, les trajectoires sont quasi constantes.