

**Feuille-réponses du TD 5**  
**Crédit/micro-crédit**

**Exercice 1.** : Taux pratiqué pour le micro-crédit : exemple de Muhammad Yunus (Prix Nobel de la Paix 2006) : La banque Grameen prête aux plus démunis dans les conditions suivantes : pour un prêt de 1000 Bangladesh Taka (BDT) l'emprunteur rembourse chaque semaine durant 50 semaines la somme de 22 BDT.

1. Quelle est la somme totale remboursée ? Quel pourcentage de la somme prêtée a-t-on remboursé en sus ?
2. On note  $r$  le "taux d'intérêt continu annuel" pratiqué, c'est-à-dire que pour 1 BDT emprunté il faut rembourser  $e^{rT}$  après un temps  $T$  exprimé en année, et donc  $e^{r\frac{k}{52}}$  après  $k$  semaines. On pose  $q = e^{-\frac{r}{52}}$ . A la date d'emprunt les 22 BDT payés en semaine  $k$  représentent une part égale à  $x_k := 22q^k$  BDT du le montant total emprunté. Expliquer pourquoi.
3. Si les remboursements commencent après une semaine alors  $q$  satisfait l'équation  $1000 = 22 \sum_{k=1}^{50} q^k$ . Pourquoi ?
4. On rappelle que  $(1 + x + \dots + x^{n-1})(1 - x) = 1 - x^n$ . En déduire que  $\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$
5. En déduire que  $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$

6. Que savez-vous du problème de résoudre l'équation  $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$

7. Voici la manière de trouver toutes les solutions, réelles ou complexes, sous Scilab :

```
q=poly(0,"q"); //q devient le polynome à une seule racine, 0.
```

```
[sols]=roots(22*q^51-1022*q+1000);
```

Que vaut la solution  $q$  de l'équation  $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$  ?

8. Quel est le taux  $r$  pratiqué par la banque Grameen ?

9. A ce taux, combien faudrait-il payer après un an (en une seule fois) pour 1000 BDT empruntés ?

10. Pour financer l'achat d'un ordinateur valant 1000 EUR, on vous propose de rembourser 30 EUR par mois durant 36 mois en commençant les remboursements après un mois. Poser  $p = e^{-\frac{r}{12}}$ . Donner l'équation satisfaite par  $p$ . Donner la valeur de  $p$  calculée au moyen de Scilab, puis répondre aux deux questions : quel est le taux continu  $r$  pratiqué ? A ce taux, combien faudrait-il payer au terme des 36 mois ?

### Exercice 2. : Actualisation

On note toujours  $r$  le taux d'intérêt continu annuel. Du fait que 1 vaudra  $e^{rt}$  à la date  $t$ , une somme  $S_t$  à la date  $t$  vaut  $S_t/e^{rt} = S_t e^{-rt}$  à la date 0 : on dit que  $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$  est la "valeur actualisée" de  $S_t$ . Calculer les valeurs  $\tilde{S}(i+1, j+1) = \tilde{S}(i, j) = \tilde{S}_t$  pour  $t = i\delta t$  du modèle de Cox-Ross-Rubinstein du TD 1, pour  $r = 20\%$ ,  $T = 1$ , et  $n = 100$ . Quelles valeurs extrémales (minimale et maximale) trouvez-vous pour  $\tilde{S}_1$  ?