

**TP8 : calcul stochastique et finance**  
**Tracé de la frontière d'exercice du Put Américain**

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes  $n = 50$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $S_0 = 120$  et  $r = 0.25$ .

**Exercice 1.** : Exécuter avec ces nouvelles constantes le programme définissant sous Scilab les valeurs  $S(i, j) = \text{SS}(i+1, j+1)$  de l'actif sous-jacent,  $C(i, j) = \text{CC}(i+1, j+1)$  de l'option Call à la monnaie, et  $P(i, j) = \text{PP}(i+1, j+1)$  de l'option Put à la monnaie. (reprendre les codes des TP précédents définissant ces 3 matrices  $SS$ ,  $CC$  et  $PP$  par récurrence retrograde), puis définir les fonctions correspondantes  $S$ ,  $C$  et  $P$ . Calculer la plus grande et la plus petite valeur de  $S_T$  puis, pour chacune d'elles, la valeur correspondante  $C(T, S_T)$  et  $P(T, S_T)$ .

**Exercice 2.** : Calculer la *prime*, c'est-à-dire le prix de ces deux options à l'instant  $t = 0$ . Recommencer pour d'autres valeurs de  $r \in [0, 0.25]$ . Pouvez vous expliquer les différences de prix observées? Revenir à  $r = 0.25$  pour les questions suivantes.

**Exercice 3.** : On a vu que pour obtenir le prix d'une option Américaine, il suffit de remplacer, dans la formule du prix de l'option Européenne correspondante, la relation de récurrence  $C_t = e^{-r\delta t} \mathbb{E}(C_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)$  par la relation  $C_t^{Amer} = \text{Max} \{ \phi(S_t), e^{-r\delta t} \mathbb{E}(C_{t+\delta t}^{Amer} / \mathcal{F}_t) \}$ . Utiliser cette propriété pour calculer les prix  $C_{amer}(i+1, j+1) = C^{Amer}(i, j) = C_t^{Amer}$ , pour  $t = i\delta t$  et  $S_t = S(i, j)$  d'une option américaine de même payoff que celle de la question précédente. Indiquer la valeur trouvée puis la comparer avec celle du Call Européen. Expliquez.

**Exercice 4.** : Reprendre la question précédente pour un Put Américain. Expliquez.

**Exercice 5.** : Reprendre les deux questions précédentes avec  $r = 0$  cette fois. Expliquez.

**Exercice 6.** : Afin de tracer la frontière d'exercice du Put Américain, définir une matrice  $EPA(i+1, j+1)$  (pour "Exercice du Put Américain") qui vaut 1 aux points  $(i, j)$  de l'arbre CRR situés en dessous de la frontière d'exercice et 0 aux points situés au dessus. On pourra initialiser cette matrice par  $EPA=-ones(n+1, n+1)$  pour remplir les points inintéressants de la matrice par des  $-1$ . A noter que la commande

`plot2d(i, SS(i+1, j+1), -2*EPA(i+1, j+1)-2)`  
 permet de tracer les points de l'arbre  $(i, S(i, j))$  en utilisant un symbol différent selon que  $EPA(i+1, j+1)$  vaut 1 ou 0 (voir l'aide en ligne pour la syntaxe de la commande `Plot2d`).

```

////////Definition de la matrice EPA (Exercice du Put Americain)////////
EPA=-ones(n+1,n+1);
for j=0 :n
    if SS(n+1,j+1)<K+1 then EPA(n+1,j+1)=1;
    else EPA(n+1,j+1)=0;
    end
end;
for i=n-1 :-1 :0
    for j=0 :i
        if psi(SS(i+1,j+1)) > (p*PPAmer(i+1+1,j+1+1)+(1-p)*PPAmer(i+1+1,j+1))/R
            then EPA(i+1,j+1)=1;
            else EPA(i+1,j+1)=0;
            end
        end
    end;
end;

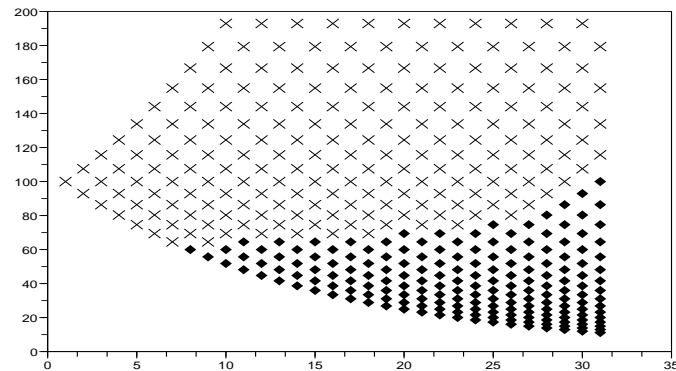
```

Pour tracer la frontière d'exercice, il suffit alors de repérer pour chaque  $i$ , s'il y a un point  $(i, S(i, j))$  pour lequel  $EPA$  vaut 1 et, dans ce cas, de choisir celui d'ordonnée maximale.

```

////////// Tracé de l'arbre pour les petites valeurs de SS(i+1,j+1) //////////
for i=0 :n
    for j=0 :i
        if SS(i+1,j+1)<2*S0
            plot2d(i+1,SS(i+1,j+1),-2*EPA(i+1,j+1)-2);
        end;
    end;
end;

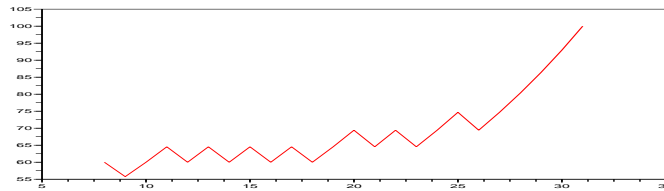
```



Expliquer pourquoi certains points  $S(i, j)$  sont marqués d'une croix et certains points sont marqués d'un losange. Que doit faire le détenteur de l'option américaine en un point marqué d'une croix? en un point marqué d'un losange?

Tracer la frontière d'exercice.

```
//////////Tracé de la frontière d'exercice//////////  
i=0;  
for i=0 :n  
    if max(EPA(i+1,1 :i+1))==1 then i=i+1;Frontiere_t(i)=i+1;  
    Frontiere_S(i)=SS(i+1,sum(EPA(i+1,1 :i+1)));  
    end;  
end;  
plot(Frontiere_t,Frontiere_S,'r-')
```



Décrire la frontière d'exercice et étudier son évolution en fonction du prix d'exercice. Expliquer.