Université de Nice
Département de Mathématiques
L3 MASS, année 2011-2012, semestre 2
Finance Stochastique

NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Calcul stochastique : feuille réponses du TP (8 et) 9
Tracé de la frontière d'exercice du Put Américain

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $n = 52$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 100$ et $r = 0.25$.

Exercice 1. : Exécuter avec ces nouvelles constantes le programme définissant sous Scilab les valeurs dans un modèle CRR les valeurs $S(i, j)$ =`SS(ii,jj)` du sous-jacent, pour `ii`= $i+1$, $C(i, j)$ =`CC(ii,,jj)` de l'option Call, et $P(i, j)$ =`PP(ii,jj)` de l'option Put. (reprendre le programme définissant ces options par récurrence retrograde). Calculer la plus grande et la plus petite valeur de S_T et, pour chacune d'elle, la valeur correspondante $C(T, S_T)$ d'un Call Européen à la monnaie, puis faites de même pour un Put Européen à la monnaie.

Exercice 2. : Calculer la *prime*, c'est-à-dire le prix de ces deux options à l'instant $t = 0$. Recommencer pour une autre valeur, plus raisonable, de r et expliquer la différence de prix obsedrvée. Revenir à $r = 0,25$ pour les questions suivantes.

Exercice 3. : On a vu que pour obtenir le prix d'une option Américaine, il suffit de remplacer, dans la formule du prix de l'option Européenne correspondante, la relation de récurrence $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$ par la relation $C_t^{Amer} = \text{Max}\,\{\phi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}^{Amer}/\mathcal{F}_t)\}$. Utiliser cette propriété pour calculer les prix `CCamer(ii,jj)`$= C^{Amer}(i, j) = C_{i\delta t}^{Amer}(S_t)$, pour `ii`= $i+1$, `jj`= $j+1$, et $S_t = S(i, j)$ =`SS(ii,jj)` d'une option américaine de même payoff que celle de la question précedente. Indiquer la valeur trouvée puis la comparer avec celle du Call Européen. Commentez par ce que vous avez appris en cours.

Exercice 4. : Reprendre la question précédente pour un Put Américain.

Exercice 5. : Reprendre la question précédente avec $r = 0$ cette fois.

Exercice 6. : Afin de tracer la frontière d'exercice du Put Américain, définir une matrice `EPA(i+1,j+1)` (pour "Exercice du Put Américain") qui vaut 1 aux points (i, j) de l'arbre de Cox situés en dessous de la frontière d'exercice et 0 aux points situés au dessus. On pourra initialiser cette matrice par `EPA=-ones(n+1,n+1)` pour remplir les points inintéressants de la matrice par des -1.

A noter que la commande

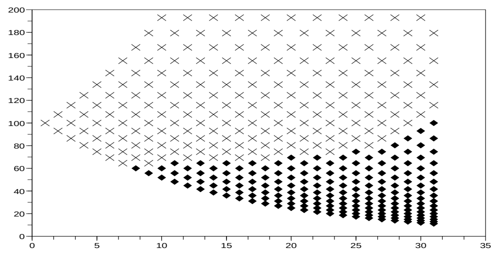
`plot2d(i,SS(i+1,j+1),-2*EPA(i+1,j+1)-2)`

permet de tracer les points de l'arbre $(i, S(i,j))$ en utilisant un symbol différent selon que `EPA(i+1,j+1)` vaut 1 ou 0 (voir l'aide en ligne pour la syntaxe de la commande `Plot2d`).

```
///////Definition de la matrice EPA (Exercice du Put Americain)///////
EPA=-ones(n+1,n+1);
for jj=1 :n+1 // jj=j+1
      if SS(n+1,jj)<=K then EPA(n+1,jj)=1; //il faut exercer
      else EPA(n+1,jj)=0; //il est inutile d'exercer
      end
end;
for ii=n :-1 :1 // ii=i+1
      for jj=1 :ii //jj=j+1
            if psi(SS(ii,jj)) > (p*PPAmer(ii+1,jj+1)+(1-p)*PPAmer(ii+1,jj))/R ..
            then EPA(ii,jj)=1; //il faut exercer
            else EPA(ii,jj)=0; //il est inutile d'exercer
            end
      end
end;
```

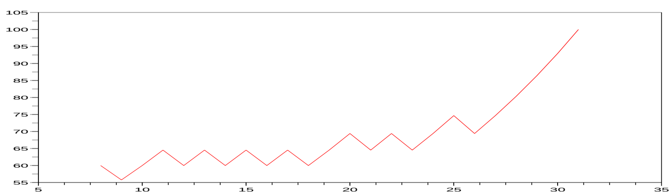
Pour tracer la frontière d'exercice, il suffit alors de repérer pour chaque i, s'il y a un point $(i, S(i,j))$ pour lequel EPA vaut 1 et, dans ce cas, de choisir celui d'ordonnée maximale.

```
//////// Tracé de l'arbre pour les petites valeurs de SS(ii,jj) ////////
for ii=1 :n+1
   for jj=1 :ii
      if SS(ii,jj)<2*S0
      plot2d(ii,SS(ii,jj),-2*EPA(ii,jj)-2)
      end;
   end;
end;
```



Expliquer pourquoi certains point $S(i,j)$ sont marqués d'une croix et certains points sont marqués d'un losange. Que doit faire le détenteur de l'option américaine en un point marqué d'un losange ? Sur la figure ci-dessus, tracer la frontière d'exercice, puis executer le code ci-dessous et comparer.

```
/////////////////////Tracé de la frontière d'exercice//////////////
k=0;
for ii=1 :n+1
       if max(EPA(ii,1 :ii))==1 then k=k+1;Frontiere_t(k)=ii; //abs. du k-ieme point
      Frontiere_S(k)=SS(ii,sum(EPA(ii,1 :ii)));//ord. du k-ieme point
      end;
end;
plot(Frontiere_t,Frontiere_S,'r-')
```



C'est ici que commence le TP09.

Exercice 7. : Choisir $S_0 = 100 = K$ (Put à la monnaie) et retracer la frontière d'exercice pour $n = 150$, $r = 25\%$ et $\sigma = 40\%$. La frontière d'exercice commence en un point $t_0 = i_0 \delta t$; "**de visu**" quelle est cette valeur de i_0 et quelle est la valeur S_{t_0} de la frontière d'exercice.

En analysant le code déterminer la **valeur exacte** de i_0 et de S_{t_0} de l'extrémité "gauche" de la frontière d'exercice. Même question pour l'extrémité "droite".

Exercice 8. : Etude de la forme de la frontière d'exercice en fonction de r et de σ : Pour $\sigma = 40\%$ tracer la frontière d'exercice pour les valeurs $r = 25\%$, $r = 5\%$, $r = 2\%$. Que se passe-t-il pour $r = 0$? A quelle valeur de $r \neq 0$ correspond la courbe la plus haute et la courbe la plus basse.

Pour $r = 25\%$, reprendre cette question pour $\sigma = 40\%$, $\sigma = 20\%$, $\sigma = 5\%$: à quelle valeur de $\sigma \neq 0$ correspond la courbe la plus haute et la courbe la plus basse.

Exercice 9. : Amélioration du graphique et production d'un fichier informatique : choisir $n = 500$. Représenter en rouge les courbes correspondant aux valeurs ci-dessus de r (pour $\sigma = 40$) et en vert les frontières pour $r = 25\%$ et les diverses valeur de σ. Faites afficher (`Edit - AxesProperties - X Y Title`) les légendes "`Pas de temps (i=0..50)`" et "`valeurs du sous-jacent S`" en face des axes correspondants. Ajouter le titre "`Salle 214/5 VOTRENOM votreprenom`" et sauvegarder (`export`) en un fichier .pdf et un fichier .eps. Imprimez votre figure ou envoyez votre fichier .pdf à `diener@unice.fr` **avec le sujet** `Salle 214/5 VOTRENOM votreprénom`.