Université de Nice, Département de Mathématique — Calcul Stochastique, L3 MASS
NOM : — 4 Avril 2012
PRENOM : Groupe : .

Calcul stochastique : feuille de réponses du TP 9
Etude de la convergence du prix CRR vers le prix BS

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab et y définir successivement les 5 quantités $\delta t = T/n$, $R = e^{r\delta t}$, $up = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, $down = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $p = (R - d)/u - d)$ comme 5 fonctions de n.

Vérifier, en choisissant quelque valeurs de n, que la limite de $p(n)$ quand n tend vers l'infini est 1/2.

Exercice 2. : Expliquez ce que calcule le code Scilab suivant.

```
//La fonction S
function y=S(i,j,n);
y=S0.*(up(n)).^j.*(down(n)).^(i-j);
endfunction;
//La fonction C
function phi=phi(S);
phi=max(S-K,0);
endfunction;
function z=C(i,j,n);
z=(phi(S(n,j :(j+n-i),n))*binomial(p(n),n-i)')/R(n)^(n-i);
endfunction;
//Trace du Call en fonction de n
Nmax=250;CCall=zeros(Nmax);
for n=1 :Nmax, Call(n)=C(0,0,n); end;
plot2d(10 :Nmax,Call(10 :Nmax));
```

Exercice 3. : Ajouter le code précédent à votre code et l'utiliser pour calculer le prix du Call pour $K = 135$ lorsque $n = 15$. Quelle valeur trouvez-vous ?

Que savez-vous de la limite des oscillations observées sur votre graphique ? L'imprimer et le joindre à votre feuille.

Exercice 4. : Même question dans le cas d'un Call à la monnaie.

Faire le tracé correspondant pour un Put d'abord avec $K = 135$ puis avec $K = 140$. Qu'observez-v

Exercice 5. : Montrer que si l'on pose erf $(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(x)$ vérifie $\mathcal{N}(x) = (1 + \mathrm{erf}\,(x/\sqrt{2}))/2$.

Définir une fonction BlackScholes(S,K,r,T,σ) donnant la valeur du Call de prix d'exercice K à la date d'exercice T lorsque le taux (constant) vaut r et la volatilité est égale à σ, en utilisant la formule de Black et Scholes

$$C = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \quad \text{, avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

On pourra utiliser la fonction Scilab erf.

Ajouter une droite horizontale d'ordonnée C sur le dessins des oscillations des prix CRR. Imprimer le résultat.