

Calcul stochastique : TP 11
Etude du modèle de Ho et Lee

Le modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon Z_t^T , $t, T \in]0, T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t := T_{\max}/N$, $t \leq T$, où Z_t^T désigne la valeur à la date t d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date T . On a donc $Z_T^T = 1$ pour n'importe quel $T \in \mathbb{T}$. C'est un modèle probabiliste sur un ensemble Ω servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ servant à coder l'information disponible à la date $t \in \mathbb{T}$. En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a. $(X_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$, $\mathbb{T}^* :=]0, T]_{\delta t}$, $X_t \in \{0, 1\}$, les X_t de même loi $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$, \mathcal{F}_t -mesurables, et indépendantes de $\mathcal{F}_{t-\delta t}$. Pour tout $t \in \mathbb{T}^*$, on pose $J_t := \sum_{s \in]0, t]_{\delta t}} X_s$ et on note n et k , $n \leq k$, les entiers tels que $t = n\delta t$ et $T = k\delta t$. La caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les zéros coupons $Z_t^T(\omega)$ appartiennent à un arbre binaire recombinaison, c'est-à-dire que, $Z_{n\delta t}^T(\omega)$ ne prend que $n + 1$ valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur $j = J_{n\delta t}(\omega)$. Pour $0 \leq j (= J_{n\delta t}(\omega)) \leq n \leq k$, nous noterons $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega) := Z(n, j, k)$.

1. Pourquoi a-t-on $Z(k, j, k) = 1$?

2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_t^{t-\delta t}} \eta(\theta^T(t), X_t), \text{ où } \theta^T(t) := T - t, \quad (1)$$

pour une fonction η définie par le choix¹ d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0, 1[$, le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \quad (2)$$

Les valeurs des Z_0^T , $T \in \mathbb{T}$, peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant $t = 0$.

Calculer $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t))$ pour tout θ et t dans \mathbb{T}^* , et où \mathbb{E}^* désigne l'espérance pour la probabilité \mathbb{P}^* .

3. Voici une implantation du modèle pour lequel on a $T_{\max} = N$ (et donc $\delta t = 1 = \text{delta_t}$), $t = n * \text{delta_t}$, $T = k * \text{delta_t}$, $J_t(\omega) = j$, $T - t = 1 * \text{delta_t}$, $T = k * \text{delta_t}$, $\eta(T - t, X_t(\omega)) = \text{eta}(1 * \text{delta_t}, x)$, pour $x = X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega) = Z(n, j, k)$, pour $J_t(\omega) = j$, avec les choix $\pi = \text{pi} := 0.5$, et $\delta = \text{delta} := 1.01$.

¹C'est le choix $\delta (= \eta(\delta t, 1) / \eta(\delta t, 0)) > 1$ qui exprime qu'un $X_t(\omega) = 1$ code un "up" et $X_t(\omega) = 0$ code un "down"

```

// Modèle de Ho et Lee
clear ;Nmax=8 ;Tmax=Nmax ;delta_t=Tmax/Nmax ;
pi=0.5 ;delta=1.01 ;r=0.025 ;
function z0=Z0(k) ; z0=(1+r)^(-k*delta_t) ; endfunction ;
plot(0 :Nmax,Z0(0 :Nmax)) ;
//
function ee=eta(l,x) ;
if x==0
ee=(1^l)/(pi+(1-pi)*delta^l) ;
else ee=delta^l/(pi+(1-pi)*delta^l) ;
end ;
endfunction ;
// représentation des eta extrêmes
xset("window",1) ;clf(1) ;
Nprime=1000 ;for x=0 :1 plot(0 :Nprime,eta(0 :Nprime,x)) ; end ;
//calcul des valeurs de la fonctions Z(n,j,k)=ZZ(n+1,j+1,k+1)
ZZ=ones(Nmax+1,Nmax+1,Nmax+1) ;
for k=0 :Nmax
ZZ(0+1,1,k+1)=Z0(k) ;
end ;
for n=1 :Nmax
for k=n :Nmax
ZZ(n+1,0+1,k+1)=eta(k-n,0)*ZZ(n-1+1,0+1,k+1)/ZZ(n-1+1,0+1,n+1) ;
for j=1 :n
ZZ(n+1,j+1,k+1)=eta(k-n,1)*ZZ(n-1+1,j-1+1,k+1)/ZZ(n-1+1,j-1+1,n+1) ;
end ;
end ;
end ;
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1) ;
endfunction ;
// Dessins : représentation des évolutions possibles de Z(n,j,N) pour N=Nmax
xset("window",2) ;clf(2) ;
N=Nmax ;
//courbes "down"
for j=0 :N plot(j :N,Z(j :N,j,N),'-b') ; end ;
//courbes "up"
for n1=0 :N
Vecteur=zeros(N-n1+1) ;
for nn=0 :N-n1
Vecteur(nn+1)=Z(n1+nn,nn,N) ;
end ;
plot(n1 :N,Vecteur,'--r') ;
end ;
xs2gif(2,'arbHoLee.gif') ;xs2eps(2,'arbHoLee.eps') ;xs2fig(2,'arbHoLee.fig') ;

```

(a) Comment a été choisie la fonction $T \mapsto Z_0^T$ constituée par les valeurs initiales de Z_t^T ?

- (b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de Z^8 : que vaut Z_8^8 ? Que vaut Z_0^8 et retrouver cette valeur sur la courbe **StructureParTermesInitiale**? Que vaut Z_4^8 après deux "up" et deux "down"? Que vaut Z_6^8 après rien que des "up"? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance $T = 8$ est "above par"; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle?

$$Z_8^8 =$$

$$Z_0^8 = \quad =$$

$$\text{Après deux "up" et deux "down" } Z_4^8 =$$

$$\text{Après rien que des "up" } Z_6^8 =$$

L'existence de situation où comme celle envisagée ci-dessus pour Z_6^8 surprend car elle signifie que ...

4. **Taux actuariels** : On appelle taux actuariel d'un zéro-coupon le taux noté A_t^T (ou $a(t, T)$) tel que

$$Z_t^T (1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1.$$

Il n'est donc défini que pour $t < T$.

- (a) Calculer A_t^T en fonction de Z_t^T . Que constatez-vous pour $t = T$?

- (b) Définir une fonction $A(\mathbf{n}, j, \mathbf{k})$ correspondant au zéro-coupon $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$ quand $J_{n\delta t}(\omega) = j$, qui est lui de valeur $Z(\mathbf{n}, j, \mathbf{k})$.

- (c) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de A_t^T aux deux valeurs $A_{t+\delta t}^T$ pouvant lui succéder dans ce modèle.

- (d) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour Z_6^8 dans la question précédente.