

Epreuve d'examen : 9 Janvier 2007 (durée 2h00)
LSV1 : Mathématiques Appliquées à la Biologie

Les quatre exercices peuvent être traités indépendamment et valent respectivement 6 points, 5 points, 4 points et 5 points (barème indicatif). On soignera les explications. Les réponses doivent être données sur cette feuille qui sera ensuite glissée en fin d'épreuve dans la copie cachetée (ne rien écrire sur la copie elle-même). Merci de choisir un identifiant (succession de quelques chiffres ou lettres) que vous ferez figurer à la fois ci-dessus et à la fois en haut de la copie cachetée portant votre nom.

Exercice 1 : Une espèce d'oiseaux a une durée de vie de 3 ans. En moyenne, chaque paire d'oiseaux produit 2 oisillons au cours de leur première année et un échantillon typique de 8 oiseaux d'un an produit en moyenne 15 oisillons. Au delà de leur deuxième année, les oiseaux ne se reproduisent plus. Seul 40% des oiseaux d'un an survivent une deuxième année et seuls 30% des oiseaux de deux ans survivent une troisième année. On suppose enfin que les oiseaux de sexes male et femelle se répartissent équitablement au sein des couvées et que le taux de survie ne dépend pas du sexe.

1. Ecrire le système dynamique linéaire modélisant l'évolution de cette population structurée en trois classes d'une année (notées j_t , p_t et a_t) :

$$\begin{cases} j_{t+1} = \dots\dots\dots \\ p_{t+1} = \dots\dots\dots \\ a_{t+1} = \dots\dots\dots \end{cases} \quad (1)$$

2. Indiquer quelle est la matrice (de Leslie) L de ce système.

3. Si l'on suppose que la population initiale comporte respectivement 200, 64 et 10 oiseaux d'un, deux et trois ans, combien y en aura-t-il de chaque classe l'année suivante selon ce modèle? Combien l'année d'après?

4. Le calcul des valeurs propres de la matrice L indique qu'elle possède $\lambda = 3/2$ pour valeur propre dominante. Que pouvez-vous en déduire concernant l'évolution de la population d'oiseaux dans son ensemble?

5. Pour une population initiale totale de $N(0) = 274$, on a obtenu les valeurs suivantes $N(1) = 419,2$, $N(2) = 622$, ... , $N(9) = 10656,513$, $N(10) = 15984,742$ et $N(11) = 23977,127$. Ces valeurs confirment-elles l'évolution attendue?

Exercice 2 : On modélise la dynamique de deux populations de type proies-prédateurs, disons des lapins $L(t)$ et des renards $R(t)$, par le système de Lotka-Volterra suivant :

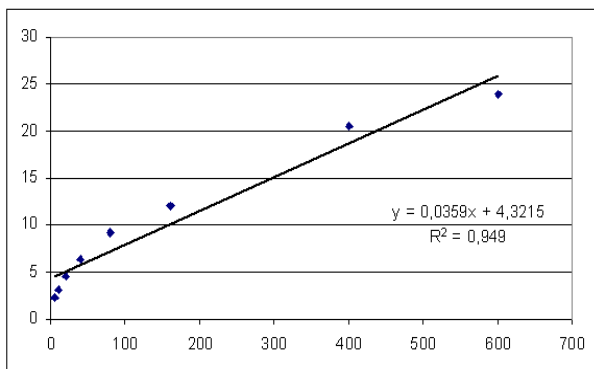
$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = aL(t) - bR(t)L(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = -cR(t) + eR(t)L(t) \end{cases} \quad (2)$$

1. Décrire la dynamique de la population de lapins en l'absence de renards (i.e. si $R(t) = 0$).
2. Décrire la dynamique de la population de renards en l'absence de lapins (i.e. si $L(t) = 0$).
3. On suppose que $a = 0,04$, $b = 0,0005$, $c = 0,2$ et $e = b * 0,1$. Donner les équations des deux isoclines horizontales et verticales.
4. Donner les coordonnées du point d'équilibre (non nul).
5. Si le nombre de lapins à l'instant initial est $L(0) = 1000$ et le nombre de renards $R(0) = 50$, ces effectifs vont-ils respectivement augmenter ou diminuer immédiatement après cet instant ? On pourra s'aider pour répondre d'une esquisse du champs de vecteurs associé.

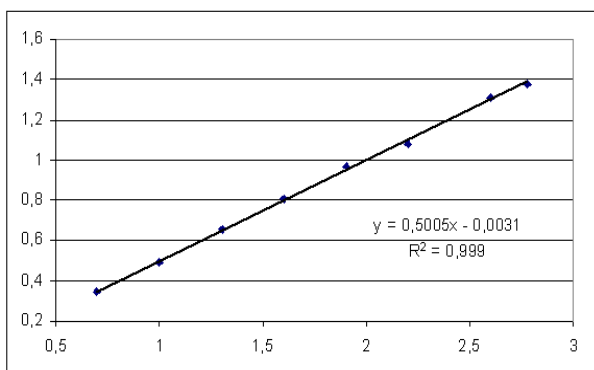
Exercice 3 : Une biologiste a remarqué que sous une lumière douce, la quantité d'auxine (hormone végétale qui favorise la croissance en longueur des plantes) produite par les plantes augmentait avec l'intensité lumineuse à laquelle elles étaient exposées. Pour le confirmer, elle fait l'expérience suivante : elle sélectionne des plants identiques qu'elle place dans une pièce sombre plusieurs jours. Puis elle divise ces plants en 8 groupes de 10 plants, chaque groupe étant placé sous une source lumineuse d'intensité différente. Après deux semaines elle mesure la quantité d'auxine dans chaque plant et détermine la moyenne par groupe. Voici ses résultats

Intensité lumineuse	5	10	20	40	80	160	400	600
Moyenne d'auxine	2.2	3.1	4.5	6.4	9.2	12	20.5	23.9

1. Le tracé suivant représente le nuage de point correspondant à ces données ainsi que la droite des moindres carrés correspondante. Pensez-vous que la quantité d'auxine produite par les plantes augmente linéairement avec l'intensité lumineuse à laquelle elles sont exposées? Pourquoi?



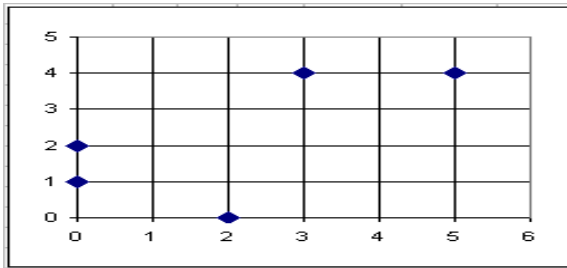
2. On a représenté cette fois les données $(\ln x_i, \ln y_i)$ obtenues à partir des précédentes en prenant le logarithme de l'intensité lumineuse et de la moyenne d'auxine. Ce nuage se prête-t-il mieux à une modélisation linéaire?



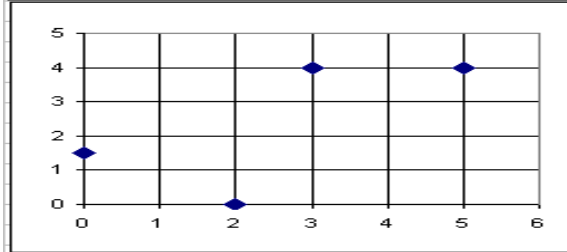
3. Quelle relation ces données suggèrent-elles entre ces deux variables initiales? Quel accroissement d'intensité lumineuse est requis, selon ces mesures, pour doubler la quantité d'auxine?

Exercice 4 : La succession des quatre dessins suivants correspond aux étapes successives d'une classification hiérarchique ascendante des cinq points $M_1(2, 0)$, $M_2(0, 1)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(3, 4)$ et $M_5(5, 4)$ progressivement regroupées en classes de deux ou trois points dont les centres de gravité sont notés G_6 , G_7 et G_8 . On suppose que les cinq points initiaux sont tous affectés du poids 1. La distance choisie pour cette classification, qui apparaît dans les quatre matrices de distance, est l'écart de Ward.

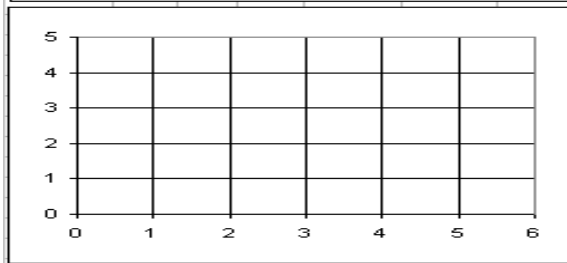
1. Compléter le troisième dessin en y plaçant les trois points devant y figurer et indiquer sur les quatre dessins le nom des points.
2. Compléter les six distances manquantes dans les matrices de distances.



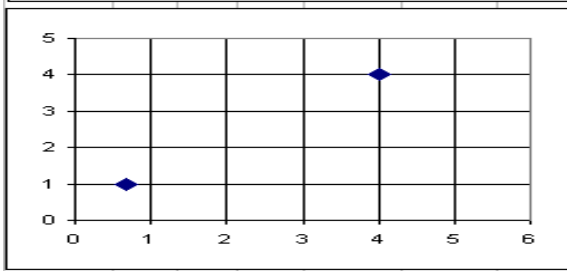
	M1	M2	M3	M4	M5
M1	0,00	2,50	4,00	8,50	12,50
M2	2,50	0,00	0,50	9,00	17,00
M3	4,00	0,50	0,00	6,50	14,50
M4	8,50	9,00	6,50		
M5	12,50			2,00	0,00



	M1	G6	M4	M5
M1	0,00	4,17	8,50	12,50
G6	4,17	0,00		20,83
M4	8,50		0,00	2,00
M5	12,50	20,83	2,00	0,00



	M1	G6	G7
M1	0,00	4,17	13,33
G6	4,17	0,00	22,25
G7	13,33	22,25	0,00



	G8	G7
G8	0,00	24,13
G7	24,13	0,00

3. Préciser les coordonnées des points G_6 , G_7 et G_8

4. Calculer les coordonnées du centre de gravité G_9 des cinq points.

5. Tracer un dendrogramme résumant cette classification.