NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 2
Résolution de systèmes différentiels

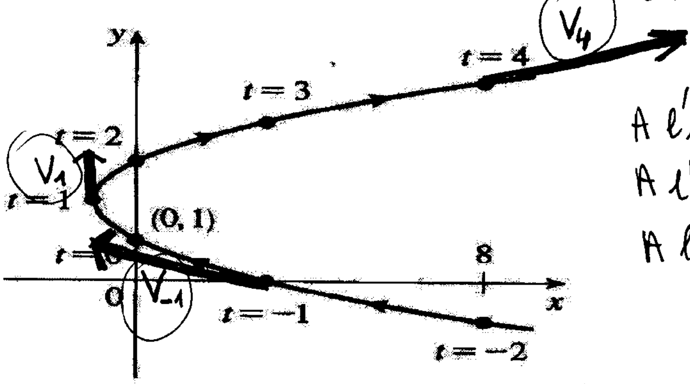
On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On a représenté sur la figure ci-dessous la courbe paramétrée $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-2t \\ t+1 \end{pmatrix}$.

1. Compléter le tableau suivant :

t	-2	-1	0	1	2	3	4
$x(t)$	8	3	0	-1	0	3	8
$y(t)$	-1	0	1	2	3	4	5

2. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse aux trois instants $t=-1$, $t=1$ et $t=4$ puis tracer ces trois vecteurs sur le graphique.



Le vecteur vitesse V est :
$V = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A l'instant $t=-1$, $V_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

A l'instant $t=1$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A l'instant $t=4$, $V_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. : On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{x} - y \end{cases} \tag{1}$$

1. Vérifier que $(x(t), y(t)) = (e^t, (t+2)e^{-t})$ est une solution de ce système.

a) Pour $x(t) = e^t$, on a bien $x' = x$
b) Pour $y(t) = \frac{1}{x} - y$, on calcule $y'(t) = 1(e^{-t}) + (t+2)(-1)e^{-t} = e^{-t} - (t+2)e^{-t}$
puis on calcule $\frac{1}{x} - y = \frac{1}{e^t} - (t+2)e^{-t}$. D'où l'égalité $y' = \frac{1}{x} - y$.

2. Quelle est sa condition initiale ?

La condition initiale est $(x(0), y(0)) = (e^0\ 2e^{-0}) = (1, 2)$.

3. Si $x(t)$ et $y(t)$ représente la taille (en milliers) de 2 populations évoluant en interaction, quel avenir ce modèle prévoit-il pour elles ?

Comme $x(t) = e^t$, on voit que $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$
Comme $y(t) = (t+2)e^{-t}$, on voit que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$
Donc la première population croît sans limite et la seconde va disparaître.

Exercice 3. : On suppose que l'on alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de larves dont ils se nourissent. La dynamique des deux populations de larves et de poissons dans ce bassins ressemble à celle d'un modèle de Lotka-Volterra mais elle en diffère par le fait que le taux de croissance intrinsèque des larves n'est pas proportionel à la taille de cette population mais constant au cours du temps. On a donc dans ce cas un modèle du type

$$\begin{cases} x' &= \alpha_1 - \beta_1 xy \\ y' &= -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{cases} \tag{2}$$

où $x(t)$ repésente la taille de la population de larves (en milliers) et $y(t)$ celle de la population de poissons. Ce type de modèle s'appelle un modèle *ressource-consommateur*. On suppose que $\alpha_1 = 20$, $\beta_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.75$ et $\beta_2 = 0.03$.

1. Quel est, selon ce modèle, le taux de mortalité par tête des poissons ?

Le taux de mortalité de $y(t)$ est le coefficient $\alpha_2 = 0{,}75$.

2. Ecrire le système différentiel pour ce modèle puis calculer les équations des deux isoclines horizontale et verticale.

$\begin{cases} x' = 20 - 0{,}04xy \\ y' = -0{,}75y + 0{,}03xy \end{cases}$

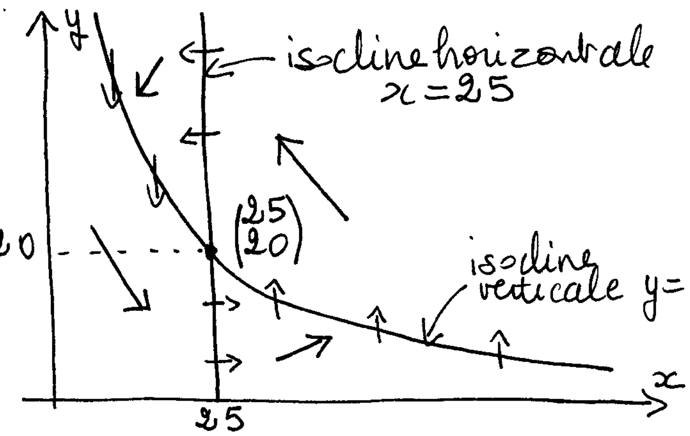
Isoline verticale : $x' = 0$ donc $y = \frac{20}{0{,}04x} = \frac{500}{x}$

Isoline horizontale : $y' = 0$ donc $0{,}75 + 0{,}03x = 0$ d'où $x = \frac{0{,}75}{0{,}03} = 25$.

3. Calculer les coordonnées de l'équilibre.

L'équilibre vérifie $x' = 0$ et $y' = 0$. Donc $\begin{cases} y = \frac{500}{x} \\ x = 25 \end{cases}$ d'où $\boxed{\begin{matrix} x = 25 \\ y = 20 \end{matrix}}$

4. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ tracer les deux isoclines, et dans chacune des 4 régions qu'elles délimitent placer une flèche indiquant la direction du champs de vecteurs associé.



5. Que pouvez-vous dire concernant le comportement des deux populations ?

Comme les trajectoires tourne autour de l'équilibre, les tailles des deux populations vont osciller.

6. On observe qu'elles semblent tendre vers l'équilibre lorsque t augmente. Ce comportement est-il compatible avec l'étude qualitative précédente ? Tracer l'allure des graphes de $x(t)$ et $y(t)$.

Oui c'st compatible car on peut avoir