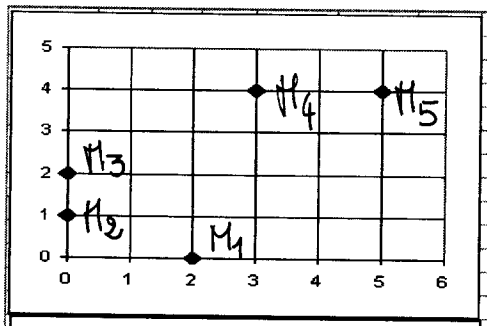
NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

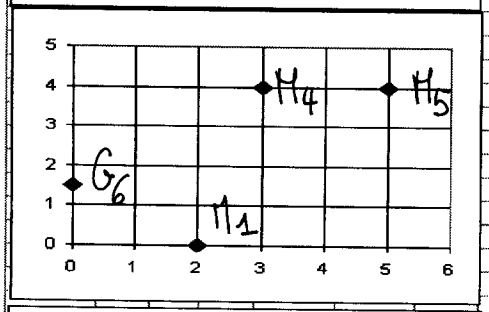
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 7
Classification hierarchique ascendante

Exercice 1. : La succession des quatres dessins suivants correspond aux étapes successives d'une classification hierarchique ascendantes des cinq points $M_1(2,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(0,2)$, $M_4(3,4)$ et $M_5(5,4)$ progressivement regroupées en classes de deux ou trois points dont les centres de gravité sont notés G_6, G_7 et G_8. On suppose que les cinq points initiaux sont tous affectés du poids 1. La distance choisie pour cette classification, qui apparait dans les quatres matrices de distance, est l'écart de Ward.



	M1	M2	M3	M4	M5
M1	0,00	2,50	4,00	8,50	12,50
M2	2,50	0,00	0,50	9,00	17,00
M3	4,00	0,50	0,00	6,50	14,50
M4	8,50	9,00	6,50	0	2
M5	12,50	17	14,5	2,00	0,00

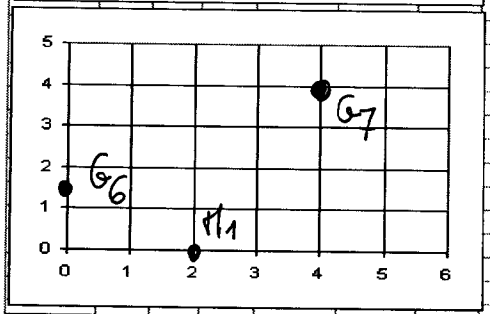
on complète par symétrie



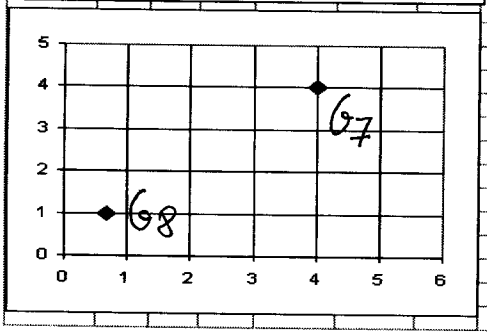
	M1	G6	M4	M5
M1	0,00	4,17	8,50	12,50
G6	4,17	0,00	10,16	20,83
M4	8,50	10,16	0,00	2,00
M5	12,50	20,83	2,00	0,00

Le point G6 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ et point 2,

$d(G6, M4) = \frac{(1)(2)}{1+2}\left(\ldots\right.$
$3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\Big)$
$\simeq 10,1666$
$= d(M4, G6)$



	M1	G6	G7
M1	0,00	4,17	13,33
G6	4,17	0,00	22,25
G7	13,33	22,25	0,00



	G8	G7
G8	0,00	24,13
G7	24,13	0,00

1. Compléter le troisième dessin en y plaçant les trois points devant y figurer et indiquer sur les quatres dessins le nom des points.
2. Compléter les six distances manquantes dans les matrices de distances.

3. Préciser les coordonnées des points G_6, G_7 et G_8

G_6 est le milieu du segment $M_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $M_3\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ donc $G_6 = \begin{pmatrix}\frac{0-0}{2}\\ \frac{1+2}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

G_7 — " — M_4 M_5 donc $G_7 = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

G_8 est le centre de gravité de G_6 (poid 2) et M_1 (poid 1). Donc $G_8 = \begin{pmatrix}\frac{2(0)+1(2)}{3}\\ \frac{2(1,5)+1(0)}{3}\end{pmatrix}$ d'où $G_8 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

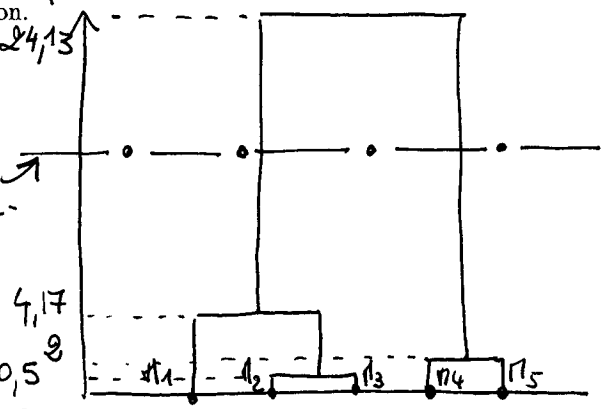
4. Calculer les coordonnées du centre de gravité G_9 des cinq points.

Les coordonnées de G_9 sont la moyenne de celles des 5 points :

$G_9 = \begin{pmatrix}\frac{2+0+0+3+5}{5}\\ \frac{0+1+\frac{3}{2}+4+4}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3,2\end{pmatrix}$ C'est le centre de gravité de G_7 (poid 2) et G_8 (poid 3)

5. Tracer un dendrogramme résumant cette classification.

La meilleure partition est obtenue en découpant le dendrogramme ici car c'est au moment de ce regroupement là qu'on a la perte d'inertie inter maximale (saut maximal).



Exercice 2. : *(Sujet inspiré d'un article de John Hartshorne, paru dans le journal de la "British Ecological Society")*

Un laboratoire d'écologie étudie les espèces micro-animales (larves, ..) présentes dans les rivières et les étangs. Il réalise, dans 6 sites de rivière, notés $R1$, $R2$, $R3$, $R4$, $R5$ et $R6$, et 3 sites d'étangs, notés $E1$, $E2$ et $E3$, des prélèvements répétés qui lui permettent d'avancer une liste des espèces présentes dans chacun de ces sites et de repérer les espèces présentes dans plusieurs sites à la fois. La matrice suivante contient, pour chaque paire de sites A et B, le nombre d'espèces communes aux 2 sites. Ainsi on y lit par exemple que 11 espèces sont présentes au site $R1$ et qu'il y a 7 espèces présentes à la fois au site $R1$ et au site $R2$.

	$R1$	$R2$	$R3$	$R4$	$R5$	$R6$	$E1$	$E2$	$E3$
$R1$	11	7	4	6	6	7	4	4	3
$R2$	7	15	8	8	9	6	3	3	2
$R3$	4	8	13	7	7	4	2	3	2
$R4$	6	8	7	15	7	6	6	8	6
$R5$	6	9	7	7	12	4	3	5	4
$R6$	7	6	4	6	4	10	6	5	5
$E1$	4	3	2	6	3	6	13	10	9
$E2$	4	3	3	8	5	5	10	15	11
$E3$	3	2	2	6	4	5	9	11	12

On se propose de regrouper les 9 sites en trois ou quatre classes composées de sites où ce sont pratiquement les mêmes espèces qui sont présentes. Pour réaliser cette classification, on propose de mesurer la distance entre deux sites A et B par la formule

$$d(A,B) = \frac{n_A + n_B - 2n_{AB}}{n_A + n_B}$$

où n_A (resp. n_B) désigne le nombre d'espèces présentes au site A (resp. au site B) et n_{AB} le nombre d'espèces en commun entre les sites A et B. On obtient la matrice des distances suivante :

$d(R_2, R_4) = \frac{13+15-2(7)}{13+15} = \frac{14}{28} \simeq 0,5$ $\quad d(E_1, E_2) = \frac{13+15-2(10)}{13+15} = \frac{8}{28} \simeq 0,285$

	$R1$	$R2$	$R3$	$R4$	$R5$	$R6$	$E1$	$E2$	$E3$
$R1$	0	0,462	0,666	0,538	0,478	0,334	0,666	0,692	0,74
$R2$	0,462	0	0,428	0,466	0,334	0,52	0,786	0,8	0,852
$R3$	0,666	0,428	0	0,5	0,44	0,652	0,846	0,786	0,84
$R4$	0,538	0,466	0,5	0	0,482	0,52	0,572	0,466	0,556
$R5$	0,478	0,334	0,44	0,482	0	0,636	0,76	0,63	0,666
$R6$	0,334	0,52	0,652	0,52	0,636	0	0,478	0,6	0,546
$E1$	0,666	0,786	0,846	0,572	0,76	0,478	0	0,285	0,28
$E2$	0,692	0,8	0,786	0,466	0,63	0,6	0,285	0	0,186
$E3$	0,74	0,852	0,84	0,556	0,666	0,546	0,28	0,186	0

1. Compléter les coefficients manquants de cette matrice.

2. Préciser quels sont les deux sites les plus proches ainsi que les deux sites les plus éloignés.

On constate que les 2 sites les plus proches sont E_2 et E_3 car $d(E_2, E_3) = 0,186$ et les plus éloignés sont E_3 et R_2 car $d(E_3, R_2) = 0,852$.

3. La classification conduit au dendrogramme représenté ci-dessous.

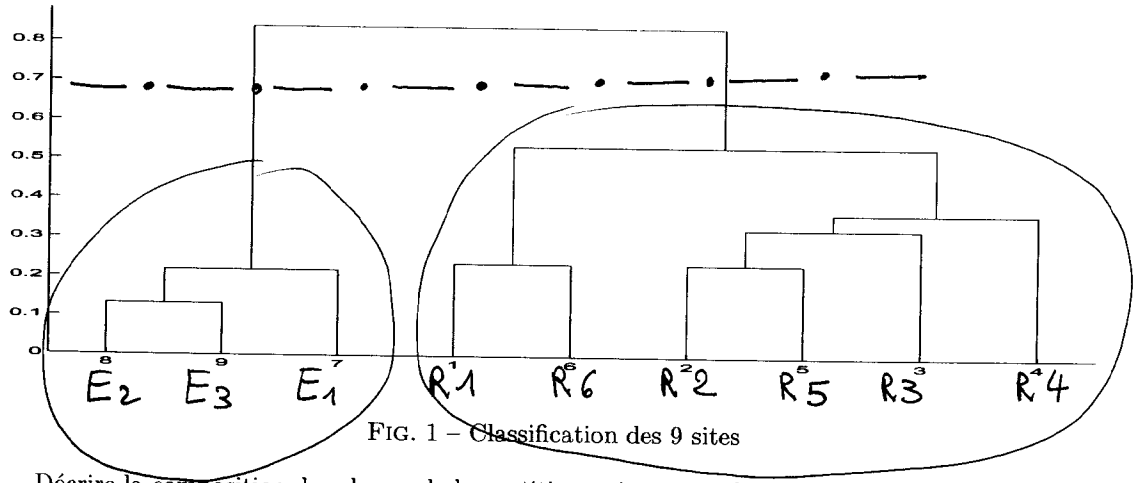


FIG. 1 – Classification des 9 sites

Décrire la composition des classes de la partition qui vous semble la plus appropriée.

Le saut maximal du dendrogramme a lieu au dernier regroupement (mais on pouvait aussi considérer l'avant dernier). Dans ce cas on trouve les 2 classes $(R_1, \ldots, R_6)$ des vivaces et (E_1, E_3) des étrangs.

4. Un autre choix de distance entre les sites aurait-il pu conduire à une partition différente ?

Oui. La décomposition dépend souvent de la distance choisie. Il faut donc s'attendre à trouver peut être une autre partition.

Pourquoi n'a-t-on pas choisi la distance euclidienne ?

Impossible ici car les différents sites ne sont pas repérés par des coordonnées : ce ne sont pas les points d'un espace euclidien.