NOM :
PRENOM : Corrigé

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 5
Le modèle de croissance logistique

Exercice 1. : Une population de bactéries $P(t)$ croît de manière logistique. On suppose que sa taille initiale est de 3mg, que sa capacité biotique est de 100mg et que son taux de croissance intrinsèque est de 0,2mg par heure. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $P(t)$.

L'équation différentielle est $P'(t) = 0{,}2\, P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{100}\right)$
C'est une équation différentielle logistique.

La solution de cette équation différentielle telle que $P(0) = 3$ est la fonction logistique

$$P(t) = \frac{300}{3 + 97e^{-0,2t}}.$$

Le vérifier (en utilisant la formule (3) cours).

La formule (3) donne pour solution la fonction $P(t) = \frac{P(0)K}{P(0) + e^{-rt}(K - P(0))}$
Ici, comme $P(0) = 3$, cela donne effectivement cette fonction.
On peut le vérifier aussi en s'assurant que la dérivée $P'(t)$ est bien égale à $0{,}2\, P(t)(1 - P(t)/100)$

Compléter la première ligne du tableau suivant :

t	0	5	10	15	20	30	40
$P(t)$	3	7,76	18,6	38,81	62,81	92,58	98,93
$3e^{0,2t}$	3	8,15	22,17	60,26	163,76	1210,29	8942,87

Compléter la seconde ligne du tableau et comparer avec la première. Expliquer la différence.

La première ligne montre une croissance logistique qui débute comme une exponentielle puis s'amortit pour plafonner en dessous de 100.
La seconde montre une croissance exponentielle qui explose.

Le tableau suivant indique la part de la capacité biotique encore disponible à l'instant t. Le compléter puis expliquer l'évolution de cette quantité au cours du temps.

t	0	5	10	15	20	30	40
$(1 - P(t)/K)$	0,97	0,92	0,81	0,62	0,37	0,07	0,01

Calculer le temps nécessaire pour que la population de bactéries passe de 3 à 30.

Le temps nécessaire pour qu'elle passe de 3 (sa valeur en $t=0$) à 30 est, selon le 1er tableau, compris entre 10 et 15. Pour le calculer précisément, on résoud l'équation

$$\frac{300}{3 + 97e^{-0,2t}} = 30$$

Soit $300 = 30(3 + 97e^{-0,2t})$, donc $10 = 3 + 97e^{-0,2t}$
ou encore $e^{-0,2t} = \frac{7}{97}$ et donc $t = \frac{1}{0{,}2}\left(-\ln \frac{7}{97}\right) \simeq 13{,}14$
Le temps nécessaire est donc de 13 heures et près de 9 mn.

Exercice 2. : Le modèle logistique est souvent utilisé pour décrire la progression d'une épidémie car celle-ci est généralement provoquée par une population (virus par exemple) qui a elle-même une croissance logistique. Supposons que quelques semaines après le début d'une épidémie on soit arrivé à la conclusion que le nombre d'individus infectés augmente comme la fonction logistique

$$N(t) = \frac{1500}{5 + 295e^{-0,9t}}.$$

Retrouver l'équation différentielle logistique qui a conduit à cette fonction $N(t)$: indiquer le nombre d'individus infectés au départ de l'épidémie, son taux de croissance intrinsèque et le nombre total approximatifs d'individus qui seront finalement infestés.

On utilise à nouveau la formule (3). On identifie $N(0) = 5$, $r = 0,9$ et $K = 1500/5 = 300$.

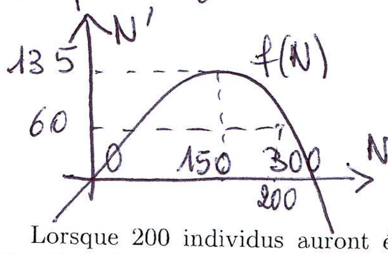
L'équation logistique est donc

$$N'(t) = 0,9\, N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{300}\right)$$

avec $N(0) = 5$.

Si l'on désigne par $N'(t)$ la dérivée de $N(t)$, tracer le graphe de N' en fonction de N. Pour quelles valeurs de $N(t)$ cette fonction est-elle, positive, nulle, négative ?

D'après l'équation différentielle précédente, la fonction donnant N' en fonction de N est



$$f(N) = 0,9\, N\left(1 - \frac{N}{300}\right).$$

N		0		300	
$f(N)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(N) > 0$ si $0 < N < 300$
$f(N) = 0$ si $N = 0$ ou $N = 300$

Lorsque 200 individus auront été infestés, quelle sera, à ce moment là le taux de croissance de l'épidémie ?

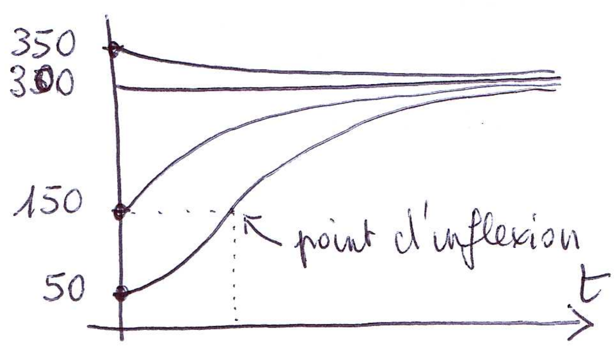
Lorsque $N = 200$, le taux N' vaut $f(200)$

$$f(200) = 0,9\,(200)\left(1 - \frac{200}{300}\right) = 0,3\,(200) = 60$$

Quelle sera le nombre d'individus infestés lorsque ce taux de croissance sera maximal ?

Le taux de croissance N' est maximal au sommet de la parabole, c'est-à-dire lorsque $f'(N) = 0$. On trouve $N = 150 = \frac{K}{2}$. Le taux vaut alors $f(150) = 135$.

Tracer l'allure du graphe d'une solution de cette équation différentielle ayant pour condition initiale $P(0) = 50$? Même question pour $P(0) = 150$ puis $P(0) = 350$ (tracer tous les graphes sur la même figure).



Les deux premières sont croissantes, la 3e est décroissante. Elles tendent toutes trois vers $K = 300$ quand t tend vers $+\infty$.