Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence MI/SM 1e année

Analyse : notes du cours 11
Limites et continuité

Les notions de limites d'une fonction en un point, celle de continuité d'une fonction et celle de limites d'une fonction à l'infini sont dejà connues. L'objet de ce cours est de donner les définitions formalisées de ces importantes notions et de présenter quelques unes de leurs propriétés.

1. Limite d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soient a et L deux réels. La formule $\lim_{x\to a} f(x) = L$, qui se lit "La limite de f quand x tend vers a est égale à l", signifie, de façon informelle, que $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est *très proche* de a. Ou encore que l'on a $|f(x) - L| < \varepsilon$ pour n'importe quel ε, aussi petit que l'on veut, pourvu que $|x - a|$ soit assez petit.

Alors que cette notion de limite a été étudiée par les mathématiciens depuis l'antiquité et plus activement après l'introduction du calcul différentiel et intégral par Leibnitz et Newton au 17e siècle, il a fallu attendre Weierstass (1815-1897) pour voir apparaître la définition formalisée suivante que tous les mathématiciens utilisent à présent (dite définition $\varepsilon - \delta$) :

Définition : On dit que la fonction $x \mapsto f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a, et on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si et seulement si l'on a

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(x) - L| < \varepsilon.}$$

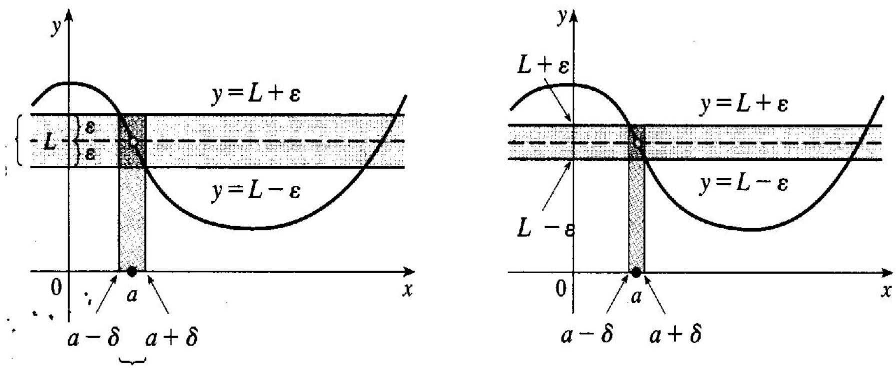

FIG. 1 – Illustration de la definition $\varepsilon - \delta$ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Exemple : A titre d'exemple montrons que $\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7$. Pour cela on commence par *deviner* quelle valeur de δ on pourait choisir en fonction de ε pour satisfaire la définition puis on vérife que cette valeur convient bien.

On remarque que $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$ peut encore s'écrire $|4x - 12| < \varepsilon$, soit $4|x - 3| < \varepsilon$. On voit que cette inégalité est vraie dès que $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$. On pense donc à poser $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Vérifions qu'avec ce choix, on a bien $\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ et montrons que si $|x - 3| < \delta$ alors $|f(x) - 7| < \varepsilon$. En effet si x est tel que $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$, on a bien alors

$$|f(x) - 7| = |(2x - 5) - 7| = 4|x - 3| < 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Notons que la condition $|x - a| < \delta$ s'écrit aussi $-\delta < |x - a| < \delta$ ou bien encore à $a - \delta < x < a + \delta$. Donc x satisfait cette inégalité lorsqu'il s'approche de a soit par la gauche (en restant inférieur), soit par la droite (en restant supérieur), soit enfin en passant d'un coté à l'autre à sa guise. Lorsqu'on impose à x de tendre vers a en restant du même coté de a, on obtient les notions de *limite à gauche* et de *limite à droite*.

Définition : On dit que la fonction $x \mapsto f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers *a par la gauche*, et on écrit $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, si et seulement si l'on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

De même on dit que $x \mapsto f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers *a par la droite*, et on écrit $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, si et seulement si l'on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ainsi on peut montrer par exemple que $\lim_{x\to 1^-} E(x) = 0$, que $\lim_{x\to 1^+} E(x) = 1$ ou bien encore que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ (il suffit de prendre $\delta = \varepsilon^2$).

Notons que L est la limite de f en a si et seulement si L est à la fois limite à gauche et limite à droite de f en a.

2. Continuité

Définition : On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}f$ est continue au point $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

La fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Par exemple la fonction $E(x)$ est continue en tout point x non entier et discontinue aux points entiers. Par contre elle est *continue à droite* aux points $n \in \mathbb{Z}$ puisque $\lim_{x\to n^+} E(x) = E(n) = n$ mais pas *continue à gauche* en ces points.

Proposition 1 *Soit x_n une suite convergente de limite l et soit f une fonction continue sur un intervalle contenant l. Alors la suite image $y_n = f(x_n)$ converge et a pour limite l'image $f(l)$ de l ; on a donc :*

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n). \tag{1}$$

Il est facile de s'assurer que ce théoreme devient faux lorsque f n'est pas continue. Ainsi, pour la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

qui n'est pas continue en $x = 2$, toute suite x_n tendant vers 2 a pour image une suite $f(x_n)$ qui tend vers 4 et non vers $f(2) = 0$. Il est donc impératif de s'assurer de la continuité de la fonction lorsqu'on veut échanger limite et fonction comme dans la formule (1).

Preuve : Rappelons les deux hypothèses du théorème : x_n est convergente de limite l donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N, \ \forall n > N \quad |x_n - l| < \varepsilon$$

et f est continue en $x = l$ donc $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$, soit

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |x - l| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(l)| < \varepsilon$$

Montrons que la suite $f(x_n)$ converge vers $f(l)$, c'est-à-dire montrons que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N, \ \forall n > N \quad |f(x_n) - f(l)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme f est continue, il existe $\delta > 0$, notons le δ_0, tel que lorsque $|x_n - l| < \delta_0$ alors $|f(x_n) - f(l)| < \varepsilon$. Or cette dernière égalité est précisément celle que nous voulons établir pour tous les n assez grands (précisément pour tous les $n > N$, N à déterminer). Mais si l'on applique l'hypothèse de convergence de x_n en choisissant pour ε le δ_0 (elle doit être vraie pour tous les $\varepsilon > 0$ donc en particulier pour $\varepsilon = \delta_0$) alors on obtient l'existence d'un N, notons le N_0, tel que $\forall n > N_0$, $|f(x_n) - f(l)| < \varepsilon$. D'où la convergence de $f(x_n)$ vers $f(l)$. □

En géneral, lorsqu'on veut s'assurer qu'une fonction est continue, il n'est pas nécessaire d'utiliser la définition : en effet, on utilise le fait que d'une part la plupart des fonctions usuelles, linéaires, polynômiales, rationnelles, puissances, exponentielles, logarithmes, trigonométriques, ... sont continues en tous les points où elles sont définies et, d'autre part la somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues sont encore des fonctions continue là où elles sont définies. Il suffit alors d'exprimer la fonction considérée à l'aide de fonctions usuelles et des opérations élémentaires.

Par exemple la fonction $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ est continue sur l'intervalle $[-4, 4]$ car elle est le produit de $x \mapsto x$ qui est linéaire (donc continue) et de $x \mapsto \sqrt{16 - x^2}$ qui est elle-même la composée d'une fonction puissance $y \mapsto \sqrt{y}$ (continue pour $y \geq 0$) et d'un polynôme $x \mapsto 16 - x^2$ continu et positif ou nul sur l'intervalle $[-4, 4]$.

En résumé, une fonction définie par une "expression" sera, en général, continue là où elle est définie. Par contre lorsqu'elle est *définie par morceaux*, comme par exemple

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

il convient de vérifier non seulement qu'elle est continue sur chaque morceau mais encore qu'elle est continue aux points "couture". Dans cet exemple, on a biensur $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $]-\infty, -1[$ (fonction rationnelle), $x \mapsto x$ continue sur $[-1, 1]$ (fonction linéaire) et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ continue sur $]1, +\infty[$ (fonction rationnelle). Mais pour montrer que f est continue sur tout $\mathbb{R}$, il faut aussi vérifier que les limites à droite et à gauche sont bien égales aux deux points $x = -1$ et $x = 1$, ce qui est bien le cas ici puisqu'on a $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -1$ et aussi $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = 1$.

3. Autres limites La définition en $\varepsilon - \delta$ de la limite d'une fonction en un point se généralise sans difficulté à deux autres cas : la limite d'une fonction à l'infini $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et le cas où la limite de la fonction en un point est elle-même égale à plus ou moins l'infini. Voici ces définitions sous leur forme formalisée :

Définition :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad : \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \ x > M \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad : \quad \forall M' > 0\ \exists M > 0\ \ x > M \ \Rightarrow\ f(x) > M'}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad : \quad \forall M > 0\ \exists\delta > 0\ \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M}$$

Ici encore, ces définitions formalisées sont rarement utilisées directement pour calculer des limites. On connait les comportements à l'infini des fonctions usuelles (comme par exemple $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ si $n > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = -\infty$ si $n < 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ou $\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$) et on connait aussi les effets des opérations usuelles sur les limites.

Exemple : Lorsqu'on veut calculer la limite à l'infini du rapport de deux polynômes, il est souvent recommandé de diviser le numérateur et le dénominateur par la plus grande valeur possible de x^n : par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{x^3 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} = 0 \cdot 1 = 0.$$

4. Image d'un intervalle Les deux propriétés le plus importantes des fonctions continues sont le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et soient a et b dans $\mathbb{R}$. Supposons $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et f continue sur $[a, b]$. Alors pour tout y strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.*

et le théorème des valeurs extrêmes (cours 2) :

Théorème 3 *Une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ possède un minimum global et un maximum global. On dit aussi qu'elle* atteint ses bornes*.*

Ces deux théorèmes ont une conséquence importante :

Corollaire 4 *L'image par une fonction continue f d'un intervalle fermé et borné $I = [a, b]$ est l'intervalle fermé et borné $J = [\mathrm{Min}\, f, \mathrm{Max}\, f]$.*

Preuve : Posons $J = f(I)$. Il découle du théorème des valeurs extrêmes que $J \subseteq [\mathrm{Min}\, f, \mathrm{Max}\, f]$; en effet, comme f atteint ses bornes $\mathrm{Min}\, f$ et $\mathrm{Max}\, f$ ces valeurs sont dans l'image de I par f et toutes les autres valeurs de $f(I)$ sont contenues dans $[\mathrm{Min}\, f, \mathrm{Max}\, f]$ puisque pour tout $x \in [a, b]$, $\mathrm{Min}\, f \leq f(x) \leq \mathrm{Max}\, f$. Inversement le théorème des valeurs intermédiaires assure que f prendra toutes les valeurs intermédiaires entre $\mathrm{Min}\, f$ et $\mathrm{Max}\, f$ et donc que $[\mathrm{Min}\, f, \mathrm{Max}\, f] \subseteq f(I)$. □