Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence MI/SM 1e année

Analyse : notes du cours 12
Approximations quadratiques et formule de Taylor

On a vu lors du premier cours que pour une fonction dérivable $x \mapsto f(x)$, l'approximation linéaire $x \mapsto L(x)$ au voisinage d'un point x_0, qui s'écrit

$$L(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0),$$

et dont le graphe est la droite tangente, fournit une approximation souvent utile de la fonction au voisinage de ce point. C'est ce qu'on appelle l'approximation de la fonction *au premier ordre*. Ce cours est consacré à l'étude d'approximations *d'ordre supérieur*, notamment d'ordre deux qu'on appelle des *approximations quadratiques*.

1. Approximations quadratiques

Définition : Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction définie au voisinage d'un point x_0, c'est-à-dire sur un intervalle ouvert contenant x_0, qui soit deux fois dérivable. On appelle *approximation quadratique* de f au point x_0 la fonction $x \mapsto Q(x)$ suivante :

$$Q(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f"(x_0).$$

On notera que $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 en x dont le graphe est donc une parabole, convexe si $f"(x_0) \geq 0$ et concave si $f"(x_0) \leq 0$.

Par exemple, les approximations linéaire et quadratique de la fonction $\cos(x)$ au point $x = 0$ se calculent de la façon suivante : comme $(\cos(x))' = -\sin(x)$ et $(\cos(x))" = -\cos(x)$, on a $f(x_0) = \cos(0) = 1$, $f'(x_0) = -\sin(0) = 0$ et $f"(x_0) = -\cos(0) = -1$. Donc $L(x) = 1$ (pas de terme de degré 1 en x) et $Q(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. La figure ci-dessous montre les graphes du cosinus et de ses deux approximations L et Q. On constate que la parabole graphe de Q est tangente au cosinus, comme sa droite tangente, mais qu'elle fournit une bien meilleure approximation.

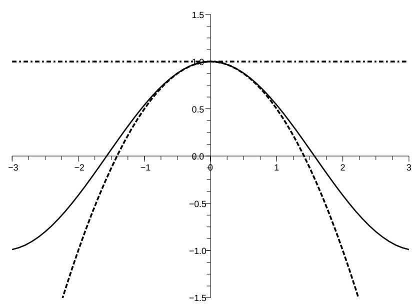

FIG. 1 – Graphes de la fonction $\cos(x)$ et de ses deux approximations linéaire $L(x)$ et quadratique $Q(x)$ au voisinage du point $x = 0$.

Comment mesurer de façon précise la qualité de l'approximation et que signifie l'affirmation que l'approximation de f par Q est meilleure que par celle par L ? Nous allons utiliser pour cela une notation très utile, notée $\varepsilon(x - x_0)$ et dite "epsilon de x moins x_0" qu'on peut rappocher des fonctions o et O de Landau.

Le mathématicien Edmund Landau (1877-1938) est en effet resté célèbre pour avoir popularisé les symboles o (dit *petit* o) et O (dit *grand* O) qui sont des fonctions ayant des comportements limite particuliers que l'on peut définir de la façon suivante :

Définition : On désigne par $\varepsilon(x - x_0)$ toute fonction f définie au voisinage de x_0 et qui vérifie $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$. On aura donc toujours $\lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$. De manière analogue, on désigne par $o(x - x_0)$ toute fonction f définie au voisinage de x_0 et qui vérifie $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = 0$. On aura donc toujours $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0$. Enfin un $O(x-x_0)$ est une fonction qui reste bornée lorsque x tend vers x_0. Ainsi par exemple la fonction $x \mapsto \sin(x-1)$ est un $\varepsilon(x-1)$ (et aussi un $O(x-1)$) mais on verra que ce n'est pas un $o(x-1)$ car $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1 \neq 0$.

2. Formules de Taylor à l'ordre 2

Lors du premier cours on a vu qu'une façon de *mesurer* la qualité de l'approximation d'une fonction f par sa linéarisée L est d'écrire que $\lim_{x-x_0} \frac{f(x)-L(x)}{x-x_0} = 0$. Cela revient à dire que l'écart $f(x)-L(x)$ entre la fonction et sa linéarisée est un $o(x-x_0)$, ce que l'on préfèrera écrire ici en disant qu'il existe un $\varepsilon(x-x_0)$ tel que

$$f(x) - L(x) = (x-x_0)\varepsilon(x-x_0).$$

On a de manière analogue le résultat suivant :

Proposition 1 *Si $x \mapsto f(x)$ est une fonction deux fois dérivable, définie au voisinage d'un point x_0, alors il existe une fonction $\varepsilon(x-x_0)$ telle que*

$$f(x) - Q(x) = f(x) - \left(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f"(x_0)\right) = (x-x_0)^2\varepsilon(x-x_0). \qquad (1)$$

Preuve : La preuve de ce résultat part du théorème fondamental de l'analyse qui permet d'écrire une fonction comme la primitive de sa dérivée :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

On réécrit cette égalité $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)dt$ (en remarquant que $(x-t)^0 = 1$). Puis on fait une intégration par partie :

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)dt = [-(x-t)f'(t)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -(x-t)f"(t)dt = (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)f"(t)dt.$$

Il reste alors à montrer que cette dernière intégrale vérifie :

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)f"(t)dt = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f"(x_0) + (x-x_0)^2\varepsilon(x-x_0).$$

Pour cela on remplace $f"(t)$ par $f"(x_0) + f"(t) - f"(x_0)$:

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)f"(t)dt = \int_{x_0}^{x}(x-t)f"(x_0)dt + \int_{x_0}^{x}(x-t)\left(f"(t) - f"(x_0)\right)dt.$$

La première intégrale est égale à $\frac{1}{2}(x-x_0)f"(x_0)$ et, pour la seconde, on pose $M(x) = \mathrm{Sup}_{x_0\leq t\leq x}(f"(t) - f"(x_0))$. Cette borne supérieure est bien atteinte puisque $t \mapsto f"(t) - f"(x_0)$ est continue et l'intervalle $[x_0, x]$ fermé et borné. Comme $x - t > 0$ pour tout t dans cet intervalle, on a

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)\left(f"(t) - f"(x_0)\right)dt < M(x)\int_{x_0}^{x}(x-t)dt = M(x)\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Il suffit alors de vérifier que l'on a bien $\lim_{x\to x_0} M(x) = 0$, ce qui découle de la continuité de $f"$. □

Définition : La formule (1) s'appelle la formule de Taylor à l'ordre 2. Il existe plusieurs façons d'exprimer le reste de Taylor (écart entre la fonction et son approximation quadratique), en voici deux autres :

Formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f"(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3\,!}f"(c) \qquad (2)$$

où $c \in]x, x_0[$ si $x < x_0$ et $c \in]x_0, x[$ sinon.

Formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 2

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f"(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f"'(t)dt. \qquad (3)$$

On a donné ici les diverses versions de la formule de Taylor à l'ordre 2. Chacune d'elles peut-être généralisée à l'ordre 3, 4, ..n pourvu que la fonction f considérée possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre 3, 4, ...n. Voici la formule de Taylor générale (pour une fonction possédant des dérivées à tout ordre) lorsqu'on exprime le reste à l'aide d'un $\varepsilon(x - x_0)$ comme dans la proposition :

Proposition 2 *Si $x \mapsto f(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable, définie au voisinage d'un point x_0, alors pour tout $n \geq 1$ il existe une fonction $\varepsilon(x - x_0)$ telle que*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \tag{4}$$

où $f^{(n)}(x)$ est une notation pour la dérivée n-ième de f. A noter que la fonction $P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n\,!} f^{(n)}(x_0)$ est un polynôme de degré n que l'on appelle le polynôme de Taylor *de f au point x_0. Les polynômes de Taylor d'ordre 1 et 2 sont respectivement l'approximation linéaire et l'approximation quadratique de la fonction.*

Exemple : Voici par exemple le calcul des polynômes de Taylor de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ d'ordre 1 à 7 en $x = 0$ et une figure représantant les graphes de ces polynômes ainsi que celui de la fonction elle-même.

n	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
$f^{(n)}(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$f^{(n)}(x_0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1
$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x - x_0)^n$	0	x	0	$-\frac{1}{3\,!}x^3$	0	$\frac{1}{5\,!}x^5$	0	$-\frac{1}{7\,!}x^7$

On déduit du tableau que

$P_1(x) = P_2(x) = x$

$P_3(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$P_5(x) = P_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$.

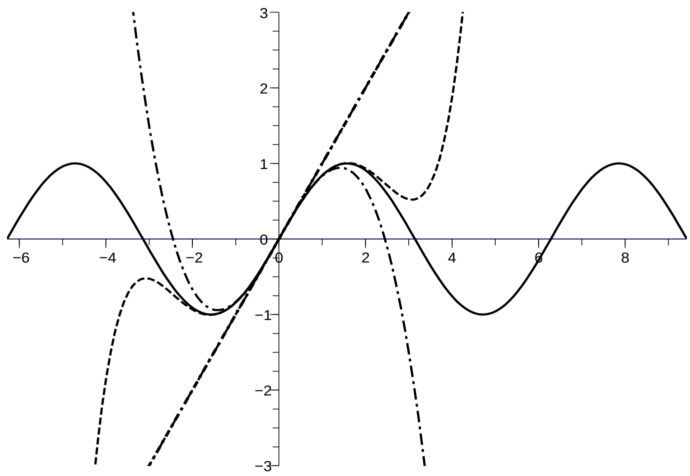

FIG. 2 – Graphes de la fonction $\sin(x)$ et de ses polynômes de Taylor d'ordre 1, 3 et 5 au point $x = 0$. A priori les approximations fournies par les polynômes de Taylor ne sont que des approximations *locales* en ce sens qu'elles ne sont valables que *lorsque x tend vers x_0*. Mais sur cette figure on voit clairement que l'intervalle sur lequel un polynôme de Taylor *colle à* la fonction va en grandissant avec n.

3. Développements limités

Définition : On dit qu'une fonction f possède un développement limité au voisinage d'un point x_0 si pour tout x appartenant à un voisinage de x_0 on a l'égalité

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Pour une fonction n fois dérivable, le développement de Taylor fournit un développement limité. On s'assure facilement qu'une fonction ne peut pas avoir deux développements limités différents. Lorsqu'elle possède un développement de Taylor, celui est donc son développement limité unique.

Exemple : On utilise les développements limités pour toute sorte de calculs, pour lever des indéterminations dans le calcul de limites, pour calculer des primitives, trouver le signe d'une quantité, etc... Par exemple, la limite suivante est indéterminée (puisque le numérateur et le dénominateurs tendent l'un et l'autre vers 0). On la calcule pourtant facilement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - x^3/3 + x^3\varepsilon(x)) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(\frac{1}{6} + \varepsilon(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} x(\frac{1}{6} + \varepsilon(x)) = 0.$$

Les développements limités peuvent s'aditionner, se multiplier, se diviser, se composer, ...les règles de calcul découlent des règles de calculs applicables aux fonctions $\varepsilon(x - x_0)$. Ainsi, sachant que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, on a :

$$\sin x + e^x = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

et aussi

$$\sin x \cdot e^x = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + x^5\varepsilon(x)\varepsilon(x) + x^3\varepsilon(x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

Quelque soit les calculs que l'on fait, la règle absolue est de ne JAMAIS oublier d'écrire les fonctions $\varepsilon(x - x_0)$ et leurs coefficients dans toutes les expressions que l'on manipule.

Voici pour finir les développements limités les plus connus. On complètera cette liste en allant par exemple consulter
`http ://fr.wikipedia.org/wiki/Développement_limité`

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^7\varepsilon(x)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$