Université de Nice | Année 2007-2008
Département de Mathématiques | Licence MI/SM 1e année

Analyse : notes du cours 3
Fonctions de deux variables

Cette leçon et la suivante proposent une introduction aux fonctions de plusieurs variables. Ce sont des outils incontournables dans tous les domaines où s'appliquent les mathématiques, physique, biologie, économies. En se restreignant à seulement deux variables, on allège un peu les formules sans rien perdre de la richesse du sujet.

1. Exemples : Il est utile d'avoir à l'esprit un petit nombre d'exemples simples qui permettront de se forger des intuitions. En voici quelques uns pour commencer qui sont illustrés par la figure 1 :

- Soient a, b et c trois nombres réels donnés. La fonction $f(x,y) = ax + by + c$ est définie pour toute valeur de x et y (son domaine de définition $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$) et elle a pour graphe un plan. Sur la figure 1 est tracé le plan d'équation $z = 2x+y-1$ dans la boîte $\{(x,y,z), -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3, -10 \leq z \leq 8\}$. On peut vérifier que les points d'intersection avec les bords de la boîte $(-3,-3,10)$, $(-3,3,-4)$, $(3,-3,2)$ et $(3,3,8)$ sont bien de la forme $(x,y,f(x,y))$ pour $f(x,y) = 2x + y - 1$.
- La fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ a aussi $\mathbb{R}^2$ tout entier pour domaine et son graphe est un bol (qu'on appelle un paraboloïde) qui présente un minimum en $(x,y) = (0,0)$.
- La fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ a aussi $\mathbb{R}^2$ tout entier pour domaine et son graphe est une selle (ou un col). On verra qu'ici l'origine $(x,y) = (0,0)$ est aussi un point critique mais la fonction n'a ni maximum ni minimum en ce point.
- La fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a aussi $\mathbb{R}^2$ tout entier pour domaine et son graphe est un cône. On verra qu'ici l'origine $(x,y) = (0,0)$ est un point où la fonction n'est pas dérivable.
- La fonction $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ n'est définie que lorsque $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, c'est à dire que son domaine de définition est le disque centré à l'origine et de rayon 3. Elle est nulle au bord de ce disque.

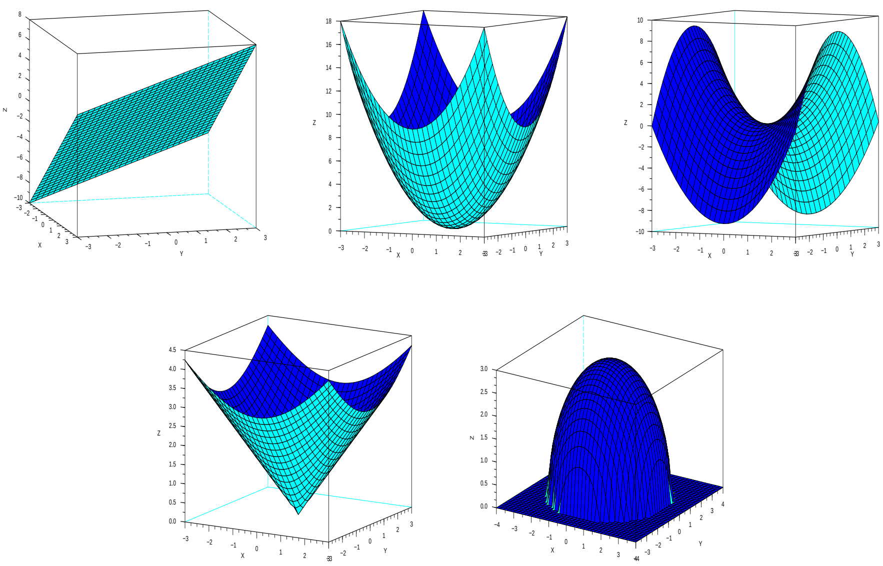

FIG. 1 – Exemples : un plan, un bol, une selle, puis un cône et un chapeau..

2. Dérivées partielles et gradient :

Une fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ a une dérivée partielle par rapport à x au point (x_0,y_0) si la fonction d'une variable $(x \mapsto f(x,y_0))$, obtenue en fixant y à la valeur y_0, est dérivable au point x_0. De même f a une dérivée partielle par rapport à y au point (x_0,y_0) si la fonction d'une variable $(y \mapsto f(x_0,y))$, obtenue en fixant x à la valeur x_0, est dérivable au point y_0. On désigne par $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ ces deux dérivées partielles. Le vecteur ayant pour composantes ces deux dérivées partielles s'appelle le *gradient* de f, noté :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \mathrm{Grad}\, f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

De la définition, on déduit que les règles de calcul des dérivées partielles sont les mêmes que celles que l'on utilise pour les dérivées des fonctions d'une variables.

Exemple : La fonction $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ a pour dérivées partielles en (x,y) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 - 2x - 0 = -2x \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 - 0 - 2y = -2y$$

Donc son gradient au point $(1,1)$ est $\nabla f(1,1) = (-2,-2)$.

Les deux dérivées partielles de f calculées en un point (x,y) quelconque, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, étant elles-mêmes des fonctions de deux variables, peuvent admettre à leur tour deux dérivées partielles. On obtient ainsi la dérivée seconde de f par rapport à x notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, la dérivée seconde de f par rapport à y notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ et les dérivées secondes croisées, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$. En fait, ces dernières sont généralement égales (c'est le cas dès qu'elles sont continues).

Exemple : Pour $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, on a $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 2xy^3 - 0, 0 + 3x^2y^2 - 4y)$ et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6xy^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6xy^2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2y - 4$.

3. Linéarisée et plan tangent : Tout comme pour les fonctions d'une seule variable, une fonction de deux variables sera dérivable (on dit aussi parfois différentiable) en un point (x_0, y_0) si elle est *suffisamment bien approchée* par une fonction linéaire qu'on appelle sa linéarisée. On la note $L(x,y)$ et on la calcule facilement à partir des deux dérivées partielles :

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y - y_0)\,.$$

Le graphe de la linéarisée $L(x,y)$ de f au point (x_0, y_0) est le plan tangent au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ (voir figure 2).

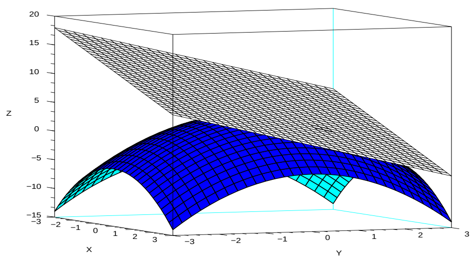

FIG. 2 – La fonction $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ et sa linéarisée $L(x,y) = -2x - 2y + 6$ au point $(x_0, y_0) = (1,1)$.

Les points $'x_0, y_0)$ où le gradient de f est (le vecteur) nul qui sont aussi les points où la plan tangent au graphe de f est horizontal, s'appellent des *points critiques* de f.

4. Courbes de niveau :

Le randonneur qui a l'habitude de lire la carte IGN avant et pendant ses randonnées sait ce que représentent les courbes de niveau qui y figurent : il sait par exemple que lorsque le sentier suit une courbe de niveau, il reste à plat et plus il s'oriente tranversalement à ces courbes de niveau et plus sa denivelée est grande (en montée ou en descente). Il sait aussi que lorsque les courbes de niveau forment des courbes fermées concentriques autour d'un point, celui-ci est un sommet (ou un fond de puit, mais c'est plus rare en montagne) et lorsque deux courbes se croisent en un point, les courbes voisines s'en approchant puis s'en éloigant, alors il s'agit d'un col. Ces courbes, bien que tracées dans le plan, apportent néanmoins de précieux renseignements sur le relief 3D.

Pour une fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$, on appelle *courbe de niveau* une courbe tracée dans le plan des variables(x,y) ayant pour équation $f(x,y) = k$. Elle relie entre eux les points du plan qui donnent à f la même valeur. C'est un exercice instructif de tracer les courbes de niveau des 5 exemples ci dessus.

Du point de vue des applications, une remarque de toute première importance est que le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ est perpendiculaire à la courbe de niveau passant par le point (x_0, y_0) et il est dirigé dans le sens des niveaux croissants.