Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence MI/SM 1e année

# Analyse : notes du cours 6
# Intégrales et primitives

La théorie de l'intégration est importante dans bien des applications des mathématiques notamment parce qu'elle est à l'origine de l'analyse de Fourier (acoustique, analyse d'images) et du calcul des probabilités (finance, génétique). Par exemple, un professionnel qui calcule le prix d'un produit financier qu'il est en train de négocier, calcule généralement une espérance mathématique, c'est-à-dire une intégrale.

## 1. Sommes de Riemann et intégrales

L'intégrale d'une fonction positive $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est l'aire de la région du plan $\mathcal{S}$ délimitée par l'axe des abscisses, le graphe de $f$ et deux segments verticaux $x = a$ et $x = b$ :

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Le calcul de cette aire est facile pour des fonctions particulières comme les fonctions constantes, car dans ce cas, $\mathcal{S}$ est un rectangle dont l'aire est le produit $(b - a)f(a)$, et plus généralement pour des fonctions qu'on appelle *constantes par morceaux* ou *en escalier*.

On dit qu'une fonction $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)$ de $[a, b]$ (c'est-à-dire une suite $(x_i)$ de $n + 1$ éléments de $[a, b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$) telle que $f$ soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Les valeurs prises par $f$ aux points $x_i$ ne sont pas spécifiées. Pour une fonction en escalier qui prend la valeur $c_i$ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ de la subdivision, l'aire de $\mathcal{S}$ (et donc l'intégrale de la fonction) vaut simplement $\sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$.

Pour une fonction quelconque, si elle peut être *suffisamment bien approchée* par une suite de fonctions en escalier, on prend pour intégrale la limite des intégrales de ces fonctions en escalier. On peut choisir pour simplifier des fonctions en escalier régulières (construites sur un découpage en intervalles de même longueur et prenant comme valeur sur les intervalles la valeur de $f$ à leur extrémité gauche) ; on obtient ainsi les *sommes de Riemann* régulières à gauche :

$$S_n = \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b - a)\right). \tag{1}$$

**Proposition 1** *Lorsque $f$ est continue et définie sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$, la suite de sommes de Riemann (1) converge et sa limite, notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$.*

Que se passe-t-il si $f$ n'est pas continue ou si l'on veut calculer son intégrale sur un intervalle non fermé ou non borné ? Le défaut de continuité n'est généralement pas un problème s'il s'agit d'une discontinuité "sage[1]" mais il peut le devenir dans des cas pathologiques rares[2]. Lorsque l'intervalle sur lequel on intègre n'est pas fermé ou pas borné, on dispose d'une généralisation de la théorie (les intégrales s'appellent alors des intégrales impropres ou généralisées) qui sera étudiée ultérieurement. En attendant, on doit rester sur ses gardes car il y a des situations "ordinaires" où surgissent des cas de non intégrabilité : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ par exemple n'est ni intégrable sur $]0, 1]$ ni sur $[1, +\infty[$ !

## 2. Principales propriétés de l'intégrale

Soit $I$ un intervalle fermé et borné et soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $I$. On a, pour tout $a$, $b$, $c$ dans $I$ et tout $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes :

[1]par exemple une discontinuité telle que la limite à gauche et la limite à droite existent mais ne sont pas égales : c'est le cas des fonctions en escalier aux points de la subdivision.

[2]comme par exemple l'indicatrice de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sur $[a, b]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pour cette fonction, si l'on veut avoir $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour des fonctions $g$ et $h$ en escalier, il faudra que $g(x) \leq 0$ et $h(x) \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ !

1. Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
2. Linéarité : $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.
3. Propriétés de signe : $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0$ (et donc $f \geq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$).
4. Propriété du rectangle : $\int_a^b dx = b - a$ (et donc si $m$ et $M$ sont respectivement des minorant et majorant de $f$ sur $[a,b]$, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$).

On notera qu'il resulte de la relation de Chasles que l'on a $\int_a^a f(x)dx = 0$ et aussi que l'intégrale $\int_b^a f(x)dx$ (pour $a \leq b$) a un sens, donné par $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$. On observera enfin que si $f \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx := -\int_a^b |f|(x)dx$.

**3. Primitives et intégrales**

Le calcul d'aires au moyen de sommes de rectangles comme les sommes de Riemann existait depuis l'antiquité mais il a fallu attendre l'invention du calcul différentiel et intégral par Leibniz et Newton au 17e siècle pour que l'on réalise que ce calcul avait un lien avec l'opération inverse de la dérivation, c'est-à-dire le calcul de primitives.

Rappelons qu'une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si $F$ est dérivable et vérifie $F' = f$. On sait qu'une fonction $f$ qui a une primitive en a une infinité qui diffèrent les unes des autres par des constantes (pourquoi ?). A noter que les primitives sont appelées *antiderivatives* en anglais.

Le théorème qui fait le lien entre dérivées et primitives s'appelle le *théorème fondamental de l'analyse :*

**Théorème 2** *Soient $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $F$ une primitive de $f$. On a la formule :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

*Il en résulte que la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ n'est autre que la fonction $f$ elle-même, c'est-à-dire que cette fonction est une primitive de $f$.*

De ce théorème il découle que pour calculer l'intégrale d'une fonction il suffit d'en connaître une primitive. D'où le développement d'un ensemble de techniques de calcul permettant de trouver des primitives de toute sorte de fonctions afin de calculer leur intégrale. Ces techniques sont aujourd'hui implantées dans les programmes de calcul formel et certaines calculatrices. Nous passons en revue à présent les plus importantes.

**4. Calcul de primitives**

Méthodes pour calculer des primitives (et par suite des aires) :

1. Utiliser les propriétés des intégrales et les primitives *connues* dont voici les indispensables :

| fonction | primitive |
|---|---|
| $x^n \ (n \neq -1)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln \lvert x \rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |

et quelques autres, moins indispensables :

| fonction | primitive |
|---|---|
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ |
| $\frac{a}{a^2+x^2}$ | $\operatorname{Arctan}(\frac{x}{a}),\ a \neq 0$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $\operatorname{Arc\,sin}(\frac{x}{a}),\ a > 0$ |

**Exemple :** Montrer que $\int_{-1}^{+1} \frac{4}{1+x^2}dx = 2\pi$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{4}{1+x^2}dx = 4\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2}dx = 4\,[\operatorname{Arctan} x]_{-1}^{+1}) = 4(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})) = 2\pi.$$

2. Intégrer par parties : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$.

   **Exemple :** Trouver la primitive de $x \mapsto \ln x$.

$$\int_1^t \ln x dx = \int_1^t (\ln x)\cdot 1 dx = [(\ln x)\cdot x]_1^t - \int_1^t (\frac{1}{x})x dx = t\ln t - 0 - [x]_1^t = t(\ln t - 1) + 1.$$

3. Utiliser un changement de variable : pour $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ monotone et dérivable ($t = \varphi(x)$), on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

   Cette égalité s'utilise dans les deux sens : pour évaluer une expression du type $\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ lorsqu'on connait une primitive de $f$, on peut poser $\varphi(x) = t$ (changement de variable implicite). Il reste alors seulement à calculer les bornes $a$ et $b$. Si à l'inverse on veut évaluer une expression du type $\int_a^b f(t)dt$, il peut être utile, lorsqu'on ne connait pas de primitive de $f$, de tenter un changement de variable explicite $t = \varphi(x)$ pour se ramener à un intégrant $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ dont on connait peut-être une primitive.

   **Exemples :** Pour calculer $\int_0^{1/2} \frac{t}{t^2-1}dt$, on fait le changement de variable implicite $t^2 - 1 = x$ qui, pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, s'inverse en $t = \sqrt{x+1}$. Donc $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$, et $\varphi'(x) = 1/2\sqrt{x+1}$. On a $0 \le t \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le -\frac{3}{4}$. On aura donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2-1}dt = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{x+1}}{x}\frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\left[\ln|-\frac{3}{4}| - \ln|-1|\right]_{-1}^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}).$$

   Pour calculer $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$, on peut faire le changement de variable explicite $\sqrt{e^x-1} = t$. On observe que $0 \le x \le \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le t \le 1$ et comme la dérivée de $x \mapsto \sqrt{e^x-1}$ est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$, on a donc

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx = \int_0^1 t(2tdt) = \int_0^1 2t^2dt = [2\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

4. Simplifier une fraction rationnelle en la *décomposant en éléments simples :*

   **Exemples :**

   (a) Comme $\frac{5x+17}{x^2-3x-10} = \frac{-1}{x+2} + \frac{6}{x-5}$, on peut calculer $\int_0^4 \frac{5x+17}{x^2-3x-10}dx$ de la façon suivante :

$$\int_0^4 \frac{5x+17}{x^2-3x-10}dx = \int_0^4 \frac{-dx}{x+2} + \int_0^4 \frac{6}{x-5}dx = [-\ln|x+2| + 6\ln|x-5|]_0^4 = -\ln 6 + 0 + \ln 2 - 6\ln 5$$

   (b) Comme $\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$, on peut calculer $\int_0^4 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$ de la façon suivante :

$$\int_0^4 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \int_0^4 \frac{dx}{(x+1)^3} - \int_0^4 \frac{2}{(x+1)^2}dx + \int_0^4 \frac{dx}{x+1}$$

   et donc

$$\int_0^4 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^{-2} + 2(x+1)^{-1} + \ln|x+1|\right]_0^4 = -\frac{1}{50} + \frac{2}{5} + \ln 5 + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{66}{50} + \ln 5.$$

**Remarque :** Il est naturel de se poser la question suivante : peut-on toujours *calculer* la primitive d'une fonction donnée ? En fait la question mérite d'être précisée. On a rappelé que toute fonction continue définie sur un intervalle $[a,b]$ est intégrable et donc, d'après le théorème fondamental, elle possède une primitive $F$. Mais ce que l'on appelle *calculer* $F$, c'est en réalité exprimer $F$ à l'aide de fonctions connues. Mais qu'est-ce qu'une "fonctions connues" ? Si par exemple on se restreint aux fonctions qui n'utilisent dans leur définition que les opérations élémentaires (additions, multiplications ...) et les racines qu'on appelle des fonctions *algébriques*, on ne pourra pas *calculer* par exemple la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ car cette primitive (la fonction logarithme) ne peut pas s'écrire en termes de fonctions algébriques : on dit qu'elle est *transcendante* tout comme l'exponentielle et les fonctions trigonométriques. Ce sera le cas aussi par exemple de la fonction (algébrique) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ dont la primitive est l'arc tangente.

Et si on élargit la classe des fonctions connues en ajoutant aux fonctions algébriques toutes les fonctions transcendantes citées, logarithme, exponentielle, trigonométriques (et donc hyperboliques) et leurs inverses, pourra-t-on, cette fois, exprimer toute primitive de fonctions de cette classe à l'aide de fonctions de cette classe ? La réponse est non et on peut même prouver un résultat général selon lequel il est impossible de construire une classe de fonctions qui contient la primitive de tous ses éléments. La recherche de primitives est donc, en quelque sorte une quète sans fin.

Ainsi la fonction la plus utilisée en probabilité et statistique, dite *cloche de Gauss*, $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est un exemple de fonction dont la primitive $F$ ne peut pas s'exprimer, même dans la grande classe précédente, plus simplement que par son expression intégrale $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ou alors comme une nouvelle fonction transcendante, introduite pour cela.

Lorsqu'on utilise un programme de calcul formel pour calculer la primitive d'une fonction, la réponse est soit une expression construite à l'aide des fonctions connues du programme (classe qui comporte quelques transcendantes de plus que celles que vous connaissez, comme par exemple les fonctions d'Airy, de Bessel ou les fonctions hypergéométriques), soit le programme retourne l'intégrale elle-même. Dans ce cas, il est vraissemblable qu'il s'agit d'une “nouvelle” fonction.