Université de Nice Année 2007-2008
Département de Mathématiques Licence MI 1e année

Analyse : notes du cours 7
Logique

Une fraction importante de l'activité mathématique consiste à formuler des énoncés puis à les démontrer. Cette activité met en jeu des compétences transversales, utiles dans toutes les autres branches des maths, analyse, algèbre, géométrie, probabilités, etc. L'étude de cette activité constitue une branche des maths qu'on appelle la logique. L'intérêt et l'utilisation de la logique dépasse largement le cadre des mathématiques. C'est cette même logique qu'on utilise dans les autres sciences où l'on fait des preuves, notamment en physique et en informatique, et qu'on rencontre également en droit et en philosophie. Ce cours traite des rudiments de la logique.

1 Introduction

Chacun de nous a des convictions (qu'il importe de respecter). Pour faire partager nos convictions, on essaie de convaincre l'autre. Pour ça, on donne des exemples et des arguments. On peut donner des arguments d'autorité ("c'est écrit dans la Bible"), sentimentaux ("si tu votes Machin, ton grand-père se retournera dans sa tombe"), on alors on peut donner des arguments "scientifiques". Mais bien sûr il ne suffit pas d'employer des mots scientifiques pour donner des arguments légitimes. Pour échanger des arguments, on utilise un langage, par exemple le français. Plus ce langage est codifié, mieux on se comprend. C'est pour ça qu'on paie des académiciens pour (entre autres choses) codifier, raffiner et ajuster en permanence notre langue.

La logique est une sorte d'académie des maths qui s'occupe de codifier d'ajuster le langage mathématique. Elle peaufine donc en permanence un langage ultra-codifié pour parler du vrai et du faux.

Pour ce faire, elle commence par restreindre drastiquement son champ de compétence : discuter l'existence de Dieu n'entre pas dans le cadre de la logique. La logique doit donc identifier les énoncés mathématiques, les seuls dont elle s'occupe, et proposer des règles impartiales permettant, au moins dans les bons cas, de décider si un énoncé mathématique est vrai ou faux. Les mathématiciens sont des gens qui acceptent ces règles proposées par la logique, et c'est pour ça qu'ils ne se mettent pas trop sur la gueule. Les autres scientifiques acceptent aussi les règles impartiales proposées par la logique et cherchent à les utiliser autant que possible. Mais comme les énoncés qui les intéressent ne sont pas mathématiques, ils remplacent les vraies questions par des questions mathématiques analogues. Pour ce faire, une phase essentielle de leur activité consiste donc à produire, dans le monde mathématique, une copie aussi fidèle que possible du contexte qui les préoccupe, c'est ce qu'on appelle la phase de modélisation.

La logique doit donc identifier les é*noncés* qu'elle prend en charge, et les *règles* de déduction auxquelles elle donne son label, autrement dit les preuves qu'elle déclare valides. Ces énoncés concernent ce qu'on appelle les objets mathématiques, par exemple des nombres, des fonctions, des points de l'espace, des figures géométriques. Ces objets sont eux-mêmes classés selon leur type et il convient donc d'identifier quels sont les types possibles (en réalité, on dit "ensemble" plutôt que "type") et quels sont les objets de chacun de ces types. Enfin, quand on fait des maths, il y a un *contexte* (mathématique), et les objets, les types et les énoncés possibles dépendent de ce contexte. On va maintenant essayer d'expliquer tout ça plus en détail et passer successivement en revue les contextes, les ensembles, les (autres) objets mathématiques, les énoncés, et enfin les preuves.

2 Contextes

Le contexte est constitué de la liste des variables (avec leur type) et des hypothèses dont on dispose sur ces variables. Les noms des variables sont sans importance, il faut juste éviter les noms déjà pris. L'ordre des variables peut avoir de l'importance (par exemple si le type de la deuxième variable dépend de la première).

Voici deux exemples de contextes :

$$x : \mathbb{R}; y : \mathbf{R}; H : x < y.$$

$$n : \mathbf{N}; f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; H : f(n+1) = 2 : K : festinjective.$$

On donne des noms aux hypothèses pour pouvoir en parler plus facilement.

3 Ensembles

Pour classer leurs objets selon leur nature, les physiciens parlent de dimension, les informaticiens parlent de types, et les mathématiciens parlent d'ensembles. Les ensembles sont des objets mathématiques particuliers. Nous connaissons l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels et l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers, tandis que nous ne considérons ni 2 ni $x \mapsto \sin x$ comme des ensembles. Chacun de nos objets a donc un type, qui est l'ensemble dont il fait partie "à la naissance". Par exemple π est du type réel, autrement dit π est un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. On abrège cette affirmation en $\pi\ : \mathbb{R}$, ou si on préfère en $\pi \in \mathbb{R}$. Bien sûr, on peut aussi l'énoncer comme suit : π est un nombre réel.

Nos ensembles à nous tournent autour des réels. Il y a l'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, et celui des entiers naturels $\mathbb{N}$. A part ça, on a des ensembles à un élément, par exemple $\{\pi\}$, ou à deux éléments et plus, comme l'ensemble $\mathbb{B} := \{V, F\}$ des booléens (Vrai et Faux) qu'affectionnent tant les électroniciens. On peut aussi faire

- la réunion de deux ensembles (qui n'ont pas d'élément commun), comme $\mathbb{N} \amalg \{\pi\}$,
- le produit de deux ensembles, comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (qu'on écrit aussi $\mathbb{R}2$)
- la flèche de deux ensembles, comme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp$ (que certains écrivent ${\mathbb{R}_\perp}^{\mathbb{R}}$, mais pas nous).

On peut encore ne prendre qu'un bout d'un ensemble (on dit un sous-ensemble ou une partie) en ne gardant que les éléments qui satisfont le critère de notre choix. Par exemple le domaine de définition de la fonction tangente est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qu'on peut écrire comme suit : $\{x : \mathbb{R} | \forall k : \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$. Dans cet exemple, le critère retenu est "ne pas être de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi\}$". On utilise $\mathcal{P}$ pour noter l'ensemble des parties, par exemple $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$.

4 Objets

Les objets dont on s'occupe sont les éléments de nos ensembles.

- Les éléments de $\mathbb{R}$ sont les nombres réels, comme π, $-e$, $\sqrt{3}$ et tous les autres.
- Les variables sont des éléments d'un ensemble que le contexte précise : si le contexte déclare $x : \mathbb{R}$, on peut affirmer que x est un élément de $\mathbb{R}$; de même, si le contexte déclare $I \subset \mathbb{R}$, on peut affirmer que I est une partie de $\mathbb{R}$ (on note $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, et donc il revient au même de déclarer $I \subset \mathbb{R}$ et $I : \mathcal{P}(\mathbb{R})$).
- Le seul élément de $\{\pi\}$ est π, tandis que $\{\pi, -e, \sqrt{3}\}$ a les trois éléments qu'on devine.
- Les éléments d'une réunion de deux ensembles sont les éléments du premier ensemble et les éléments du second.
- Les éléments du produit de deux ensembles sont les couples (x, y) constitués d'un élément x du premier ensemble et d'un élément y du second. Par exemple $(\pi, -\sqrt{2})$ est un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\perp$.
- Les éléments de la flèche $R \to S$ de deux ensembles R et S sont les "abstractions" de la forme $x \mapsto f(x)$, où $f(x)$ est un élément de S (dans le contexte augmenté de la variable x de type R). On appelle ces éléments des fonctions ou plutôt des applications (la terminologie n'est pas très strictement établie). On n'a pas du tout envie d'écrire $x \mapsto$ chaque fois qu'on écrit une fonction, mais il le faut.

5 Enoncés

Comme nos objets et nos ensembles, nos énoncés se comprennent dans un contexte.

- $Vrai$ et $Faux$ sont nos deux énoncés "de base".
- Si A et B sont deux énoncés (dans un même contexte), alors *nonA*, *nonB*, *A et B*, *A ou B* et $A \Rightarrow B$ sont autant de nouveaux énoncés dans le même contexte.
- Pour fabriquer un énoncé dans le contexte C, on peut partir d'un énoncé P dans le contexte C' obtenu en ajoutant à C une variable, par exemple f, avec son type T, par exemple $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : \forall f : T, P$ est un énoncé dans le contexte C, ainsi que $\exists f : T, P$.

6 Définitions

Les objets et les énoncés qui intéressent les mathématiciens, comme par exemple le nombre π, ou la conjecture de Goldbach (qui subodore que tout nombre pair est somme de deux nombres premiers) auraient des notations dramatiquement longues si les gens n'avaient pas inventé, bien avant la pratique du SMS, un moyen fulgurant pour économiser la salive (l'encre, le papier et toute cette sorte de choses), savoir le mécanisme des noms (ou des définitions) : on remplace une notation complexe par un nom. Par exemple π est le nom d'un nombre relativement important puisqu'il a un nom à deux lettres. Il faut croire que e est encore plus important au vu de la taille de son nom. Choisir les bonnes définitions, c'est choisir à quoi on donne un nom, et lequel. Tous les choix sont possibles à condition de ne pas utiliser deux fois le même nom, et encore : on note + l'addition des entiers, aussi bien que celle des angles ou celle des fonctions. Bien sûr il y a des choix plus efficaces que d'autres.

Chaque fois qu'on donne ou qu'on rappelle la définition d'un objet, on doit préciser le nom choisi, le contexte de rigueur, le type de l'objet, et enfin sa valeur. On fait déjà ça en Terminale, notamment pour les fonctions. On écrit bien le nom de la fonction, en général f, puis son type, par exemple $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$, puis sa valeur, par exemple $x \mapsto 2sqrtx - 1 - x$. Ca donne :

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2sqrtx - 1 - x.$

On peut raccourcir a en $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} := x \mapsto 2sqrtx - 1 - x,$

ou encore si on préfère ne pas expliciter le domaine de définition tout en faisant apparaître clairement que f n'est pas partout définie :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp := x \mapsto 2sqrtx - 1 - x,$

Et en effet, on va ensuite parler des valeurs prises par f, comme par exemple $f(3)$, mais on va aussi parler de l'objet plus abstrait f, par exemple on va dire "f est croissante sur $[1, 2]$".

On est souvent un peu moins formel quand il s'agit d'énoncés. Par exemple on dira : "soit f une fonction et I une partie de son domaine de définition, on dit que f est croissante sur I si, pour x et y quelconques dans I, $f(x)$ et $f(y)$ sont dans le même ordre que x et y". Une façon de comprendre ça un peu mieux consiste à y voir une fonction *est_croissante_sur* qui

- attend un premier argument (f) qui est aussi une fonction et un deuxième argument (I) qui est une partie de $\mathbb{R}$
- renvoie le booléen $\forall x,\, y : I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- qui n'est bien défini que si I est contenu dans le domaine de définition de f

On peut résumer l'essentiel de cette affaire en écrivant :

$est\_croissante_sur : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{B}_\perp := (\{, \mathcal{I}) \mapsto \forall \S, \dagger : \mathcal{I}, \S \leq \dagger \Rightarrow \{(\S) \leq \{(\dagger).$

Bien entendu, on peut préférer préciser le domaine de définition de $est_croissante_sur$, mais a devient vraiment lourd :

$est\_croissante_sur : \{(f, I) \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) | \mathcal{I} \subset \mathcal{DD}(\{)\} \to \mathbb{B} := (\{, \mathcal{I}) \mapsto \forall \S, \dagger : \mathcal{I}, \S \leq \dagger \Rightarrow \{(\S) \leq \{(\dagger).$

Comme pour l'addition, on choisit la notation "infixe" $fest\_croissante_surI$ plutôt que la notation préfixée $est\_croissante_sur(f, I)$, et de même qu'on ne parle pas souvent de l'objet abstrait + hors de son contexte (les deux nombres qu'on ajoute), on ne parle quasiment jamais de l'objet abstrait $est\_croissante_sur$ sans son contexte (f et I avec $I \subset DD(f)$).

Lorsque le professeur consciencieux donne une définition, il prononce souvent une phrase du genre "je vais introduire une nouvelle propriété". Il faut bien comprendre qu'il ne s'agit de nouveauté que relative à l'inexpérience des élèves : lors d'une définition, il n'y a pas création d'un nouvel objet, il y a seulement création d'un nouveau nom.

7 Preuves

Maintenant qu'on sait ce que c'est qu'un énoncé, il ne reste plus qu'à dire comment on prouve un énoncé. C'est une sorte de jeu, un peu comme une réussite. Dans ce jeu, une position, c'est ce qu'il reste à prouver, et ça consiste en un ou plusieurs *objectifs*. Un objectif, c'est un énoncé (on dit aussi *but*) avec son contexte. Pour jouer, notre joueur dispose d'un certain nombre de *tactiques* pour faire évoluer ses objectifs. Ces tactiques sont dûment estampillées par les logiciens et en même temps elles sont tout-à-fait conformes au sens commun. On va maintenant passer en revue les principales tactiques.

7.1 Expliciter

Une des tactiques les plus courantes consiste *expliciter*, on dit aussi *traduire*. Cette tactique remplace un symbole ou un mot par sa définition, ou alors elle exploite une propriété caractéristique. Par exemple elle remplace $2x + 3 \in [5, 7[$ par $5 \leq 2x + 3$ et $2x + 3 < 7$; si cette traduction intervient au but, on aura donc deux buts à la place d'un seul, tandis que si elle intervient dans une hypothèse, on aura deux hypothèses à la place d'une seule. On peut aussi expliciter un but qui commence par $\forall$. Par exemple, si ce but est de la forme $\forall x : \mathbb{R}, P(x)$, le contexte va être augmenté de la déclaration $x : \mathbb{R}$ et le nouveau but sera $P(x)$. Symétriquement, on peut expliciter une hypothèse qui commence par $\exists$. Par exemple si cette hypothèse est de la forme $\exists x : \mathbb{R}, P(x)$, le contexte va se trouver augmenté des deux déclarations $x : \mathbb{R}$ et $P(x)$. Dans les deux cas, si la lettre x est déjà prise, on peut en prendre une autre. La tactique expliciter est *réversible :* elle simplifie sans prendre de risque. Elle sait simplifier notamment les énoncés de la forme A *et* B, A *ou* B, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$.

7.2 Appliquer

Une autres des tactiques les plus courantes consiste *appliquer* une *ressource* disponible, soit une hypothèse, soit un résultat autorisé, théorème ou proposition déjà démontré. Il y a donc une *bibliothèque*} où figurent toutes les ressources disponibles. Lorsqu'on applique une ressource qui commence par $\forall$, on doit préciser le ou les arguments auxquels on applique la ressource. Par exemple si le but est $g(x) \leq g(6)$ (dans un contexte où g est une fonction croissante et x un réel compris entre 1 et 3) et qu'on applique l'hypothèse de croissance de g, on doit préciser les arguments (ici x et 6) auxquels on applique cette hypothèse. Dans le présent exemple, ces arguments sont imposés par le but. Mais si par exemple le but était $g(x) \leq 2$, dans le même contexte avec en plus l'hypothèse $g(3) \leq 2$, on appliquerait d'abord la *transitivité* de l'ordre, qui dit $\forall x,\, y,\, z : R, x \leq y\ ety \leq z \Rightarrow x \leq z$. Et comme arguments, on prendrait : $x := g(x)$, $y := g(3)$, $z := 2$. Et si les valeurs de x et de z "se voient" dans le but, celle de y est beaucoup moins en évidence. Nos ressources ont souvent une forme voisine de $\forall x, y : E, H(x,y) \Rightarrow C(x,y)$. Si on peut appliquer cette ressource avec les arguments $x := a$ et $y := b$, c'est que notre but courant est $C(a,b)$. Et ce que fait la tactique, c'est qu'elle remplace la conclusion $C(a,b)$ par l'hypothèse correspondante $H(a,b)$.

7.3 Réécrire

La troisième tactique la plus courante consiste à réécrire. Parmi les ressources dont on dispose, certaines affirment des égalités et nous autorisent à remplacer, dans le but ou dans une hypothèse, un objet par un objet égal.

7.4 Distinguer

La quatrième tactique la plus courante consiste à distinguer. On distingue deux cas selon qu'une certaine condition C (qu'on doit préciser, bien sûr) est vraie ou fausse. Cette tactique génère, à partir de l'objectif courant, deux objectifs obtenus en ajoutant respectivement l'hypothèse C et l'hypothèse $nonC$ au contexte. Cette tactique est particulièrement utile en présence d'objets définis par cas, comme la fonction valeur absolue, ou la fonction max.

7.5 Dduire

La cinquième tactique la plus courante consiste à déduire un fait "nouveau". Pour cela, on applique une ressource disponible, par exemple de la forme $\forall x, y : E, H(x,y) \Rightarrow C(x,y)$, mais cette fois ce n'est plus notre but qui est de la forme $C(a,b)$, c'est une de nos hypothèses qui est de la forme $H(a,b)$, et donc la ressource nous garantit $C(a,b)$. L'effet de cette tactique consiste dans ce cas à enrichir le contexte avec la nouvelle information $C(a,b)$, qu'on traite donc comme une hypothèse supplémentaire.

7.6 Exhiber

La tactique *exhiber* ne peut s'appliquer qu'à un but existenciel, par exemple de la forme $\exists x : \mathbb{R}, C(x)$. Il s'agit alors de proposer un *témoin*, c'est-à-dire un nombre réel t, dont on prétend pouvoir prouver qu'il a la propriété voulue C. La tactique "exhiber t" remplace donc le but $\exists x : E, C(x)$ par le but $C(t)$.

7.7 Autres tactiques

On dispose de quelques autres tactiques, comme "Contraposer", "Par l'absurde", "Par récurrence", mais pour cette fois ça suffit.

7.8 Rédiger

On a commencé par écrire des arguments mathématiques sur des tablettes. Après on l'a fait sur des parchemins, puis sur du papier avec un stylo. Puis sur une machine à écrire, puis sur l'ordinateur avec un traitement de texte. Bientôt on fera toutes les preuves avec un logiciel spécialisé, genre Coqweb, mais en attendant les preuves rédigées ont encore quelques belles années devant elles. Une preuve rédigée, c'est un texte informel qui doit suggérer, de façon concise, élégante, convaincante, comment marche la vraie preuve, la sucession de tactiques gagnantes. Rédiger une preuve, c'est donc à la fois un exercice scientifique et un exercice littéraire, autant dire qu'on a juste le temps de dire que c'est très important et difficile, mais pas du tout le temps de dire comment on fait.