NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Analyse : Feuille de réponses du TP 11
Limites et continuité

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. : En utilisant la négation de la définition de la limite :
$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \quad |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$, montrer que la limite $\lim_{x\to 3}(2x-1)$ n'est pas égale à 6. En déduire que la fonction $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ n'est pas continue en $x = 3$.

Exercice 2. : Montrer avec la définition $(\varepsilon - \delta)$ que $\lim_{x\to -5}(4 - \frac{3x}{5}) = 5$ et illustrer votre preuve à l'aide d'un dessin comme celui du cours.

Exercice 3. **:** Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ L & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de f. Choisir la valeur de L de telle sorte que f soit continue sur son domaine. Tracer son graphe.

Exercice 4. **:** Esquisser les graphes des fonctions suivantes. Sont-elles continues ? Sinon, indiquer si, aux points de discontinuité, elles sont continues à droite, à gauche...

$$f_1(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 3 \\ 5-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 5. : théorème du point fixe

1. Tracer le graphe d'une fonction continue définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et indiquer sur le dessin où sont ses points fixes.

2. Tenter de dessiner à présent le graphe d'une fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ n'ayant aucun point fixe. Quel est l'obstacle ?

3. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $g(x) = f(x) - x$ pour montrer qu'une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ a nécessairement un point fixe au moins.

Exercice 6. Indiquer le domaine de définition des fonctions suivantes et montrer qu'elles sont continues sur leur domaine en les explicitant au moyen de fonctions usuelles et d'opérations :

$f_1(x) = \ln x + \sqrt{25 - x^2}$

$f_2(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}$

$f_3(x) = \exp(\frac{1}{\sqrt{x+1}})$

Exercice 7. Par chaque fonctions déterminer l'image de l'intervalle $[a, b]$ et le comparer avec $[f(a), f(b)]$:

$g_1(x) = \sin x,\ [a, b] = [0, 2\pi]$

$$g_2(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases},\ [a, b] = [1, 4].$$

$$g_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},\ [a, b] = [-1, 2].$$