NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Analyse : Feuille de réponses du TP 8
Calcul intégral (suite)

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP. Les exercices supplémentaires ne sont à faire que par ceux qui ont terminé la feuille avant la fin de la séance.

Exercice 1. : Longueur d'une courbe

1. Calculer de deux façons différentes la longueur de l'arc de courbe défini par

$$y = 2x + 1 \quad , \quad -1 \leq x \leq 3$$

tout d'abord en notant qu'il s'agit d'un segment de droite (par le théorème de Pythagore), puis comme graphe de la fonction $x \mapsto 2x + 1$.

2. Même question pour l'arc de courbe suivant, en notant qu'il s'agit cette fois d'un arc de cercle :

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad , \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Exercice 2. :

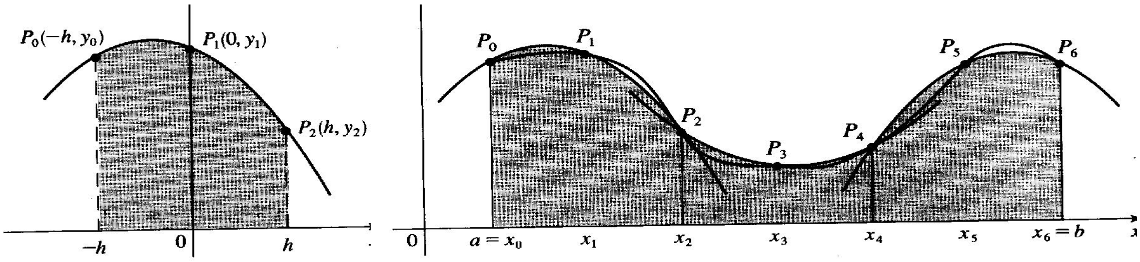
La valeur exacte à $0,001$ près de $\int_0^1 e^{x^2} dx$ est $1,463$. Calculer successivement les approximations S_n^g, S_n^d, M_n et T_n de cette intégrale pour $n = 5$. Dans chaque cas, on précisera si l'approximation surestime ou sous estime la valeur exacte et on expliquera le signe de l'erreur à partir d'un dessin.

Exercice 3. **:** Voici une liste de nombres au hasard répartis uniformément entre 0 et 1. En vous servant de cette liste, calculer une estimation de $\int_0^1 e^{x^2}dx$ par la méthode de Monté-Carlo pour $n = 5$ puis $n = 10$. Commentez vos résultats. Un autre choix de nombres aléatoires aurait-il donné les même approximations ? Le vérifier.

0,61	0,76	0,43	0,39	0,39	0,33	0,28	1,00	0,49	0,30
0,01	0,07	0,39	0,16	0,63	0,97	0,12	0,06	0,08	0,39
0,59	0,54	0,04	0,50	0,55	0,86	0,03	0,99	0,07	0,48

Exercice 4 : Méthode de Simpson

On considère le graphe d'une parabole $x \to f(x) = ax^2 + bx + c$ sur l'intervalle $x \in [-h, h]$ et on suppose que $f(-h) = y_0$, $f(0) = y_1$ et $f(h) = y_2$ comme sur la partie gauche de la figure ci dessous.



Vérifier que $\int_{-h}^{h} ax^2+bx+c = h(\frac{2ah^2}{3}+2c)$. En déduire la formule $\int_{-h}^{h} ax^2+bx+c = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$.

A l'aide de cette formule et de la figure ci dessus (à droite), calculer l'approximation de Simpson de l'intégrale

$$\frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$

Exercices suplémentaires :

1. Calculer les longueur des arcs de courbe suivants :

$$y = \frac{1}{3}(x^3+2)^{3/2}, \;\; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}, \;\; 1 \leq x \leq 3$$

2. Reprendre l'exercices 2 pour l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.
3. Reprendre l'exercices 3 pour l'intégrale $\int_0^1 \cos(x^2) dx$.