NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 12
Approximations quadratiques et formule de Taylor

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. : Compléter le tableau suivant et en déduire les polynômes de Taylor d'ordre 1 à 4 en $x_0 = 1$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$.

$n!$	1	1	2	6	24
n	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$f^{(n)}(x)$	$(x+3)^{1/2}$	$\frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}$	$-\frac{1}{4}(x+3)^{-3/2}$	$+\frac{3}{8}(x+3)^{-5/2}$	$-\frac{15}{16}(x+3)^{-\frac{7}{2}}$
$f^{(n)}(x_0)$	2	$1/4$	$-1/32$	$+3/256$	$-15/2048$
$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$	2	$\frac{1}{4}(x-1)$	$-\frac{1}{64}(x-1)^2$	$\frac{1}{512}(x-1)^3$	$-\frac{5}{16384}(x-1)^4$

pour $x = 1$ $\quad (x+3)^{1/2} = 4^{1/2} = 2$, $(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{2}$ $\quad (x+3)^{-3/2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$(x+3)^{-5/2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ $\quad (x+3)^{-7/2} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

$P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}x$

$P_2(x) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}(x^2 - 2x + 1) = \frac{7 \cdot 16 - 1}{64} + x\left(\frac{8+1}{32}\right) - \frac{1}{64}x^2$

$P_3(x) = \frac{111}{64} + \frac{9}{32}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{512}(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)$

$= \frac{111}{64} + \frac{1}{512} + x\left(\frac{9}{32} + \frac{3}{512}\right) + x^2\left(-\frac{1}{16} - \frac{3}{512}\right) + \frac{1}{512}x^3$

$P_4(x) = \frac{1}{512}\left(7 + 147x - 33x^2 + x^3 - \frac{5}{512}(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 1)\right)$

$= \frac{1}{16384}\left(7 \cdot 512 + 147 \cdot 512\,x - 33 \cdot 512\,x^2 + 512\,x^3 - 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 + 30x - 1\right)$

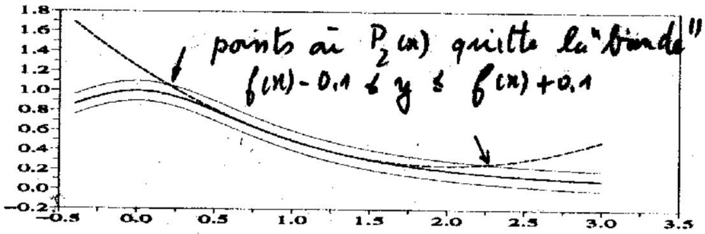
$=$

$P_1(x) = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}x$	$P_2(x) = \frac{111}{64} + \frac{9}{32}x - \frac{1}{16}x^2$
$P_3(x) = \frac{7}{512} + \frac{147}{512}x - \frac{33}{512}x^2 + \frac{1}{512}x^3$	$P_4(x) = \frac{1}{16384}\left(3583 + 75294x + 16926x^2 + 542x^3 - 5x^4\right)$

Exercice 2. : On dit que le polynome de Taylor $P_n(x)$ de f en $x = x_0$ approxime la fonction $x \mapsto f(x)$ à ε près si $|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui, pour $\varepsilon = 0.1$ revient à dire que

$$f(x) - 0.1 \leq P_n(x) \leq f(x) + 0.1 \tag{1}$$

On pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; donc $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Pour $x_0 = 1$, on trouve $P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ et $P_2(x) = \frac{1}{4}(5 - 4x + x^2)$. La figure suivante représente les graphes des fonction f (en gras) $f + 0.1$ et $f - 0.1$ (en fin) et le polynome de Taylor P_2 (en pointillés).



1. Déterminer visuellement un intervalle $[x_-, x_+]$ sur lequel P_2 approxime la fonction f à 0.1 près.

votre $x_- =$ 0.5	votre $x_+ =$ 2

par exemple...

2. pour trouver les x_- et x_+ les plus éloignés l'un de l'autre possible, quelle equation faut-il résoudre ?

On voit que $P_2(x) \geq f(x) - 0.1$ (mais en toute rigueur il faudrait le prouver). Il convient de déterminer pour quels x on a bien $P_2(x) \leq f(x) + 0.1$. Pour cela, il convient de résoudre l'équation $P_2(x) = f(x) + 0.1$, c'est-à-dire

votre équation : $\frac{1}{4}(5 - 4x + x^2) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{10}$

3. Réduire l'équation à la forme d'un polynome égal à 0. On a

$$\frac{1}{4}(5 - 4x + x^2) = \frac{10 + 1 + x^2}{10(1+x^2)} \quad \left(= \frac{11 + x^2}{10(1+x^2)} \right).$$

$$\Leftrightarrow (5 - 4x + x^2)10(1+x^2) = 4(11 + x^2).$$

$$\Leftrightarrow 10(5 - 4x + x^2 + 5x^2 - 4x^3 + x^4) = 44 + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 10x^4 - 40x^3 + 56x^2 - 40x + 6 = 0.$$

équation réduite : $10x^4 - 40x^3 + 56x^2 - 40x + 6 = 0$

4. Utiliser les fonctions de résolution numérique de votre calculatrice pour trouver les meilleurs x_- et x_+ (approchés) :

$x_- \simeq 0{,}1971144564$	$x_+ \simeq 2{,}247260121$

Exercice 3. : Soit f une fonction dont le développement limité (DL) à l'ordre 6 est

$$f(x) = 5 + 2(x-1) + 4(x-1)^3 - 2(x-1)^6 + (x-1)^6\varepsilon(x-1).$$

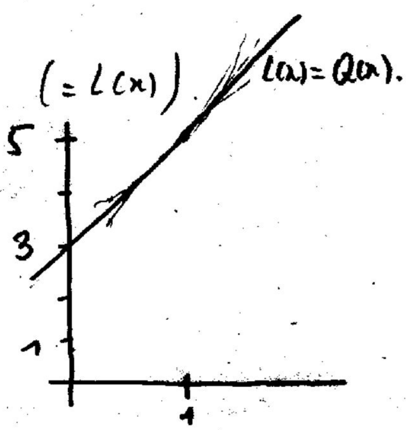
1. Utiliser l'unicité du DL et la formule de Taylor pour calculer les valeurs en $x_0 = 1$ de f, f', f'', $f^{(3)}$, et $f^{(4)}$. Le sujet fait allusion à la dérivée quatrième de f, nous devons donc supposer que f est 4 fois dérivable. La formule de Taylor en $x_0 = 1$ nous donne le DL
$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 f''(1) + \frac{1}{6}(x-1)^3 f'''(1) + \frac{1}{24}(x-1)^4 f^{(4)}(1) + (x-1)^4\varepsilon(x)$
Par unicité du DL nous pouvons identifier les coeffs ; $f(1) = 5$, $f'(1) = 2$, $\frac{1}{2}f''(1) = 0$, $\frac{1}{6}f^{(3)}(1) = 4$

$f(1) =$ 5	$f'(1) =$ 2	$f''(1) =$ 0	$f^{(3)}(1) =$ 24	$f^{(4)}(1) =$ 0

2. Quelles sont les approximation linéaire L et quadratiques Q de f en $x_0 = 1$. Tracer leur graphe sur une même figure.

$L(x) = 5 + 2(x-1) = 3 + 2x$

$Q(x) = 5 + 2(x-1) + 0\cdot(x-1)^2 = 3 + 2x \quad (= L(x))$



$L(x) =$ $3+2x$	$Q(x) =$ $3+2x$

Exercice 4. : En utilisant les DL connus, calculer les DL à l'ordre 3 de

1. $f_1(x) = 2\sin(x) - 4\cos(x)$ en $x_0 = 0$

$\boxed{f_1(x)} = 2\sin x - 4\cos x = 2(x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)) - 4(1 - \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + x^3\varepsilon_2(x))$

$= -4 + 2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^3(2\varepsilon(x) - 4\varepsilon_2(x)) = \boxed{-4 + 2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)}$

avec $\varepsilon_2(x) := 2\varepsilon(x) - 4\varepsilon_2(x)$ qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0

2. $f_2(x) = (e^x)^2$ en $x_0 = 0$

$\boxed{f_2(x) = (e^x)^2 = e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + (2x)^3\varepsilon(2x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)}$

avec $\varepsilon_2(x) := 8\varepsilon(2x)$ qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0

3. $f_3(x) = \cos(x-3)$ en $x_0 = 3$ On sait que $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + 0 + u^3\varepsilon(u)$; pour $u = x-3$ on a

$\cos(x-3) = 1 - \frac{1}{2}(x-3)^2 + (x-3)^3\varepsilon(x-3)$

4. $f_4(x) = \ln(1 + x + 2x^2)$ en $x_0 = 0$ On sait que $\ln(1+u) = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + u\varepsilon(u)$; pour $u = x + 2x^2$

$\boxed{\ln(1 + x + 2x^2)} = x + 2x^2 - \frac{1}{2}(x + 2x^2)^2 + \frac{1}{3}(x + 2x^2)^3 + (x + 2x^2)^3\varepsilon(x + 2x^2)$.

$= x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2x^3 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}3x^2(2x^2) + \frac{1}{3}3x(2x^2)^2 + \frac{1}{3}(2x^2)^3 + x^3(1+2x)^3\varepsilon(x + 2x^2)$.

$= x + x^2(2 - \frac{1}{2}) + x^3(-2 + \frac{1}{3}) + x^3\varepsilon_1(x)$, avec $\varepsilon_1(x) := -2x + 2x + 4x^2 + \frac{8}{3}x^3 + (1+2x)^3\varepsilon(x + 2x^2)$

$= \boxed{x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)}$, où $\varepsilon_1(x)$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0

Exercice 5. : Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{1+x-e^x}$

$1+x-e^x = \cancel{1}+\cancel{x}-(\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2!}+x^2\varepsilon_1(x)) = x^2(-\frac{1}{2}-\varepsilon_1(x))$

Le dénominateur présente donc un zéro d'ordre 2. On va donc rechercher un développement d'ordre 2 du numérateur.

$1-\cos x = \cancel{1}-(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)) = x^2(+\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x))$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1+x-e^x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x))}{x^2(\frac{1}{2}+\varepsilon_1(x))} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon_1(x)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x-\frac{1}{6}x^3}{x^5}$ Le dénominateur a un zéro d'ordre 5; on recherche donc un DL d'ordre 5 du numérateur.

$\sin x - x - \frac{1}{6}x^3 = \cancel{x}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon(x)-\cancel{x}-\frac{1}{6}x^3 = x^5(\frac{1}{120}+\varepsilon(x))$.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x - \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^5}(\frac{1}{120}+\varepsilon(x))}{\cancel{x^5}} = \dfrac{1}{120}+\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = \dfrac{1}{120}$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x+x^2}{\cos(x)-1}$ Nous avons vu que $\cos x - 1 = -x^2(\frac{1}{2}+\varepsilon_1(x))$

DL du numérateur à l'ordre 2 : $\ln(1+x)-x+x^2 = \cancel{x}-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)-\cancel{x}+x^2 = x^2(\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x))$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x+x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}(\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x))}{\cancel{x^2}(-\frac{1}{2}-\varepsilon_1(x))} = \dfrac{\frac{1}{2}+\lim\varepsilon_2(x)}{-\frac{1}{2}+\lim\varepsilon_1(x)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-x}{4x^3}$ Le dénominateur présente un zéro d'ordre 3.

DL du numérateur à l'ordre 3 : $\tan(x)-x = \cancel{x}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)-\cancel{x} = x^3(\frac{1}{3}+\varepsilon(x))$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^3}(\frac{1}{3}+\varepsilon(x))}{4\cancel{x^3}} = \dfrac{\frac{1}{3}+\lim\varepsilon(x)}{4} = \dfrac{\frac{1}{3}}{4} = \dfrac{1}{12}$