NOM : Date :

PRENOM : Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 3

Fonctions de deux variables

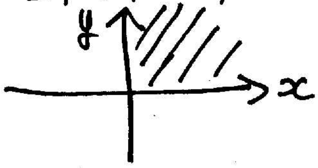
Corrigé

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. : Trouver le domaine de la fonction $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, le représenter puis calculer les 2 dérivées partielles premières au point $(x_0,y_0)=(2,1)$.

Même exercice pour $g(x,y)=\ln(y-2x)$ en $(-1,5)$.

Domaine de f : $\{(x,y),\ x\geq 0,\ y\geq 0\}=[0,+\infty[\times[0,+\infty[$: c'est un quart de plan

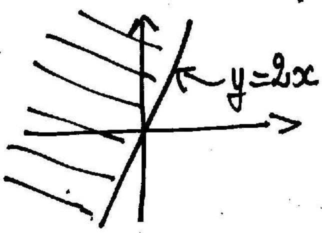


Dérivées partielles :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\frac{1}{2}$

Domaine de g : $\{(x,y),\ y-2x>0\}$: c'est le demi plan bordé par la droite $y=2x$, au dessus de la droite.



Dérivées partielles :

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{-2}{y-2x}$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x}(-1,5)=-\frac{2}{7}$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y-2x}$ $\quad \frac{\partial g}{\partial y}(-1,5)=\frac{1}{7}$

Exercice 2. :Calculer les dérivées secondes des fonctions $f(x,y)=x^2y+x\sqrt{x}$ et $g(x,y)=\cos^2(5x+2y)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy+\frac{3}{2}\sqrt{x}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y+\frac{3}{4\sqrt{x}}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-10\cos(5x+2y)\sin(5x+2y)$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-4\cos(5x+2y)\sin(5x+2y)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=50\left[\sin^2(5x+2y)-\cos^2(5x+2y)\right]$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=+20\left[\sin^2(5x+2y)-\cos^2(5x+2y)\right]=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=8\left[\sin^2(5x+2y)-\cos^2(5x+2y)\right]$

Exercice 3. :

1. Soit α un nombre réel. Vérifier que la fonction $u(t,x) = e^{-\alpha^2 t}\sin x$ est solution de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
2. Vérifier que pour toute fonction f d'une variable ayant une dérivée seconde f'', la fonction $u(t,x) = f(x+at)$ où a est un nombre réel donné est solution de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Pour $u(t,x)$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\alpha^2 e^{-\alpha^2 t}\sin x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = e^{-\alpha^2 t}\cos x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -e^{-\alpha^2 t}\sin x$$

Donc on a bien

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\alpha^2 e^{-\alpha^2 t}\sin x = \alpha^2\left(-e^{-\alpha^2 t}\sin x\right) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

Pour $u(t,x) = f(x+at)$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f'(x+at) \times \frac{\partial}{\partial t}(x+at) = a f'(x+at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = a^2 f''(x+at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = f'(x+at)\frac{\partial}{\partial x}(x+at) = f'(x+at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f''(x+at)$$

Donc on a biem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x+at) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Exercice 4. : Calculer l'équation du plan tangent à $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ au point $(2,1,8)$. Même question pour $e^x \ln y$ en $(3,1,0)$.

1) Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 4$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 8$

L'équation du plan tangent à f au point $(2,1,8)$ est :

$$z = 8 + 4(x-2) + 8(y-1)$$

ce qui s'écrit encore $\boxed{z = 4x + 8y - 8}$

2) Comme $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^x \ln y$, $\frac{\partial g}{\partial x}(3,1) = 0$

Comme $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{e^x}{y}$, $\frac{\partial g}{\partial y}(3,1) = e^3$

L'équation du plan tangent à g au point $(3,1,0)$ est :

$$z = 0 + 0 + e^3(y-1)$$

ce qui s'écrit encore $\boxed{z = e^3 y - e^3}$

Exercice 5. : Trouver les points critiques de $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$ et donner l'équation du plan tangent en ces points. Même exercice pour $f(x,y) = sin^2 x + \frac{1}{4}y^2$.

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3y(2x)}{(x^2+y^2+1)^2}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-3(x^2+y^2+1)+3y(2y)}{(x^2+y^2+1)^2} = -\frac{3(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$

On a $\text{Grad} f = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 6xy = 0 \\ 3(x^2-y^2+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x=0 \\ y=1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x=0 \\ y=-1 \end{pmatrix}$$

En ces 2 points critiques, le plan tangent est horizontal et a pour équation $\boxed{z = -3/2}$ et $\boxed{z = 3/2}$ respectivement.

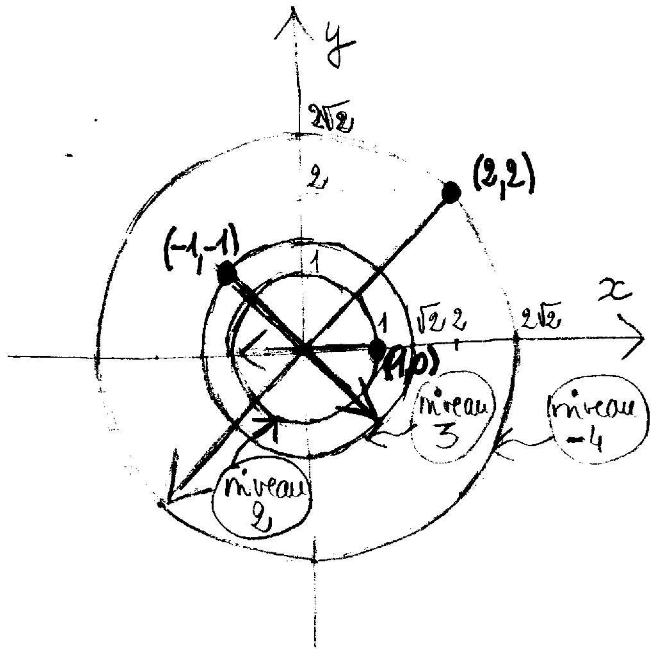
2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \sin x \cos x$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}y$

On a $\text{Grad} f = 0 \iff \begin{cases} 2\sin x \cos x = 0 \\ \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x = \pi \ (\pi) \\ y = 0 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x = \pi/2 \ (\pi) \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Il y a donc 2 familles de points critiques. Pour la première $(\pi\ (\pi), 0)$, le plan tangent est horizontal et a pour équation $\boxed{z = 0}$. Pour la seconde $(\frac{\pi}{2}\ (\pi), 0)$, le plan tangent est horizontal et a pour équation $\boxed{z = 1}$

Exercice 6. : Tracer les trois courbes de niveaux de $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ passant par les points $(1,0)$, $(2,2)$ et $(-1,-1)$ puis le vecteur gradient de f en chacun de ces points. Vérifier sur le dessin et par le calcul qu'il est bien perpendiculaire aux courbes de niveau et dirigé dans le sens des niveaux croissants.

Au point $(1,0)$, on a $f(1,0) = 4-1 = 3$, donc la courbe de niveau 3 a pour équation, $4 - x^2 - y^2 = 3$ ou encore $\boxed{x^2+y^2=1}$
C'est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
Au point $(2,2)$, on a $f(2,2) = 4-4-4 = -4$, donc la courbe de niveau -4 a pour équation, $4 - x^2 - y^2 = -4$ ou encore $\boxed{x^2+y^2=8}$
C'est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Au point $(-1,-1)$, on a $f(-1,-1) = 4-1-1 = 2$, donc la courbe de niveau 2, a pour équation $4 - x^2 - y^2 = 2$ ou encore $\boxed{x^2+y^2=2}$
C'est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.



Calcul des vecteurs gradient : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$

d'où
$\nabla f(1,0) = (-2,0)$ $\nabla f(2,2) = (-4,-4)$ $\nabla f(-1,-1) = (2,2)$
sont bien perpendiculaires à la courbe de niveau.