

**Exercice 5.** : Pour chacun des énoncés suivants, proposez un contexte plausible, puis proposer une version formelle (ou explicite) de l'énoncé et de sa négation :

1)  $f$  est paire 2)  $g$  est majorée sur  $I$  3)  $f$  a une racine sur  $J$  4)  $f$  est strictement croissante.

1) Contexte:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Version formelle:  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ .  
La négation de cet énoncé est:  $\exists x \in \mathbb{R} / f(-x) \neq f(x)$ .

2) Contexte:  $I \subset \mathbb{R}; g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Version formelle de l'énoncé:  
 $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in I, g(x) \leq M$ . Sa négation est donc  
 $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I / g(x) > M$  (autrement dit,  $g$  prend des valeurs aussi grandes qu'on veut).

3) Contexte:  $J \subset \mathbb{R}; f: J \rightarrow \mathbb{R}$ . Version formelle de l'énoncé:  
 $\exists x \in J / f(x) = 0$ . Négation:  $\forall x \in J, f(x) \neq 0$  (autrement dit,  $f$  ne s'annule pas).

4) Contexte:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Version formelle de l'énoncé:  
 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ . Négation:  
 $\exists x, y \in \mathbb{R} / x < y$  et  $f(x) \geq f(y)$ .

**Exercice 6.** : Expliquer en détail une preuve formelle de l'énoncé "la fonction  $\cos$  est paire", en invoquant les ressources qu'il vous paraît raisonnable de trouver dans la bibliothèque. Donner une version rédigée de votre preuve.

**Exercice 7.** : Expliquer en détail une preuve formelle de l'énoncé

$$\forall a, r, x \in \mathbb{R}, |x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$$

en invoquant les ressources qu'il vous paraît raisonnable de trouver dans la bibliothèque. Donner une version rédigée de votre preuve.

NOM :  
PRENOM :

Date :  
Groupe :

**Analyse : Feuille de réponses du TP 7**  
**Logique**

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

**Exercice 1.** : Que pensez-vous des déclarations suivantes pour un contexte ?

$x: \mathbb{R}; H: x \leq y$   $y: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall x: \mathbb{R}, f(y) \leq 0$   
 $x: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall x: \mathbb{R}, f(y) \leq 0$   $y: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall y: \mathbb{R}, f(y) \leq 0$   $y: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall y: \mathbb{R}, f(x) \leq 0; x: \mathbb{R}$ .

- \*  $x: \mathbb{R}; H: x \leq y$  : incorrect, car  $y$  n'est pas défini
- \*  $y: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall x: \mathbb{R}, f(y) \leq 0$  : correct (mais le  $\forall x: \mathbb{R}$  est superflu)
- \*  $x: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall x: \mathbb{R}, f(y) \leq 0$  : incorrect, car  $x$  étant fixé, on ne peut pas écrire  $\forall x \in \mathbb{R} \dots$  (on ne sait plus ce que désigne  $x$ ).
- \*  $y: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall y: \mathbb{R}, f(y) \leq 0$  : incorrect ( $y$  est fixé, donc  $\forall y \in \mathbb{R}$  n'est plus permis).
- \*  $y: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall y: \mathbb{R}, f(x) \leq 0; x: \mathbb{R}$  : incorrect (même raison)

**Exercice 2.** : Pour chacun des ensembles suivants, proposez un contexte plausible :

- 1)  $\{x: \mathbb{R} / f(x) \leq 1\}$  2)  $\{x: \mathbb{R} / 3 \ln f(x) \leq 1\}$  3)  $[1, y] \times \{x: \mathbb{R} / x \leq 1\}$  4)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \leq 1\}$   
5)  $\{x: \mathbb{R} / x \neq 2k\pi\}$  6)  $\{k: \mathbb{N} / x \neq 2k\pi\}$  7)  $\{(x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} / x \neq 2k\pi\}$  8)  $\{x: \mathbb{R} / \forall k: \mathbb{Z}, x \neq 2k\pi\}$ .

Il y a bien sûr plein d'autres bonnes réponses.

- 1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- 2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; H: \forall x: \mathbb{R}, f(x) > 0$
- 3)  $y: \mathbb{R}; H: y \geq 1$
- 4) pas besoin de contexte ici.
- 5)  $k: \mathbb{N}$  ( $k: \mathbb{R}$  marche aussi...)
- 6)  $x: \mathbb{R}$
- 7) pas besoin de contexte ici
- 8) pas besoin de contexte non plus

**Exercice 3.** : Pour chacun des objets suivants, proposez un contexte plausible, et indiquez son type :

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \int_0^1 f(x,t) dx \quad t \mapsto \int_0^a f(x,t) dx \quad x \mapsto \int_0^x f(x,t) dt \quad f \mapsto \int_0^1 f(t) dt.$$

$$\ast \int_0^1 f(x) dx \quad : \quad \text{Contexte: } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou } f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Type : nombre réel

$$\ast \int_0^1 f(x,t) dx \quad \text{Contexte: } f: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t: \mathbb{R}$$

Type : nombre réel

$$\ast t \mapsto \int_0^a f(x,t) dx \quad \text{Contexte: } f: [0,a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Type : fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\ast x \mapsto \int_0^x f(x,t) dt \quad \text{Contexte: } f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Type : fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\ast f \mapsto \int_0^1 f(t) dt \quad \text{Contexte: pas besoin}$$

Type : fonction

$$\{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice 4.** : Pour chacun des énoncés suivants, proposez un contexte plausible, puis indiquez si, dans le contexte que vous proposez, l'énoncé est toujours vrai, toujours faux, ou ni l'un ni l'autre :

1)  $\int_0^1 f(x) dx = 3$  2)  $f(x) \leq g(x)$  3)  $f$  est continue sur  $I$  4)  $e^x = e^{-x}$  5) la fonction exponentielle est impaire.

1) Contexte:  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  ; alors ni l'un ni l'autre!

2) Contexte:  $x: \mathbb{R}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ;  
alors ni l'un ni l'autre!

3) Contexte:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; a: \mathbb{R}; b: \mathbb{R}; I = [a,b[$  ;  
alors ni l'un ni l'autre

4) Contexte:  $x: \mathbb{R}; H: x \neq 0$  ; dans ce cas  
l'énoncé est toujours faux.

5) Pas de contexte ; cet énoncé est faux.