NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 9
Accroissements finis

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. : Théoreme de Rolle

1. **Vérifier que les hypothèse du théorème de Rolle s'appliquent à la fonction $f(x) = x^3 - x$ pour $-1 \leq x \leq 1$ puis trouver le point c qui satisfait la conclusion du théorème. Faire de même pour $g(x) = \cos 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.**

$f(x) = x^3 - x$

* f est derivable sur $[-1;1]$
* $f(-1) = f(1) = 0$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]-1;1[$ tel que $f'(c)=0$

or $f'(x) = 3x^2 - 1$

donc c est solution de l'equation

$3c^2 - 1 = 0$

c'est à dire $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$g(x) = \cos 2x$

. g est derivable sur $[0;2\pi]$

. $g(0) = g(2\pi) = 1$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0;2\pi[$ tel que $g'(c)=0$

or $g'(x) = -2\sin 2x$

donc c est solution de l'équation

$-2\sin 2c = 0$

c.à.d $c = \frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$

2. **Pour la fonction $f(x) = (x-1)^{-2}$, vérifier que $f(0) = f(2)$ et que pourtant il n'existe pas de c tel que $f'(c) = 0$. Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Rolle. Même question pour $g(x) = |x-1|$.**

$f(x) = (x-1)^{-2} = \frac{1}{(x-1)^2}$

$f(0) = f(2) = 1$

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}$ - $f'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Le théorème de Rolle ne s'applique pas ici car la fonction f n'est pas definie et donc pas derivable en $x=1$.

$g(x) = |x-1|$

$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$g(0) = g(2) = 1$

g' est toujours non nulle

g est derivable en tout point de $[0;2]$ sauf en $x=1$ - Les hypothèses du théorème de Rolle ne sont donc pas toutes verifiées.

Exercice 2. **: Egalité des accroissements finis**

Montrer qu'une fonction dont la dérivée est positive est une fonction croissante.

Rappelons qu'une fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ si

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leqslant y$. Montrons que $f(x) \leqslant f(y)$

f est une fonction dérivable sur $[x, y]$ donc d'après l'egalité des accroissements finis il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Or par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}$ $f'(t) \geqslant 0$

donc en particulier $f'(c) \geqslant 0$

Par conséquent, $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$

Comme $y - x \geqslant 0$, on en deduit facilement que $f(y) - f(x) \geqslant 0$

d'où $f(y) \geqslant f(x)$

f est donc croissante.

Exercice 3. : Inégalité des accroissements finis

1. **Soit f une fonction dérivable sur $[2,5]$ et telle que $1 \leq f'(x) \leq 4$ pour tout $x \in [2,5]$. Montrer que $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$.**

f est derivable sur $[2,5]$ donc il existe $c \in]2;5[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{f(5)-f(2)}{3}$

Comme $\forall x \in [2;5]$ $1 \leqslant f'(x) \leqslant 4$, on a

$$1 \leqslant \frac{f(5)-f(2)}{3} \leqslant 4.$$

d'où, en multipliant l'inegalité par 3, on a

$$3 \leqslant f(5) - f(2) \leqslant 12.$$

2. **Existe-t-il une fonction f telle que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ et $f'(x) \leq 2$ pour tout x ? Expliquer.**

Supposons qu'une telle fonction existe, alors comme f est derivable sur $[0,2]$, il existe $c \in]0;2[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{5}{2} > 2 \quad (\text{Absurde})$$

On vient de montrer que quelle que soit la fonction f choisie, la condition $f'(x) \leqslant 2$ ne pourra pas être verifiée. Une telle fonction n'existe donc pas.

Exercice 4 : Théorème de la valeur moyenne

1. Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 4x - x^2$ sur $[0, 3]$.

$$f_{moy} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 4x - x^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$

$$= 3$$

2. Trouver une valeur $c \in [0, 3]$ où f atteint sa valeur moyenne.

$$f(c) = 3 \iff 4c - c^2 - 3 = 0$$

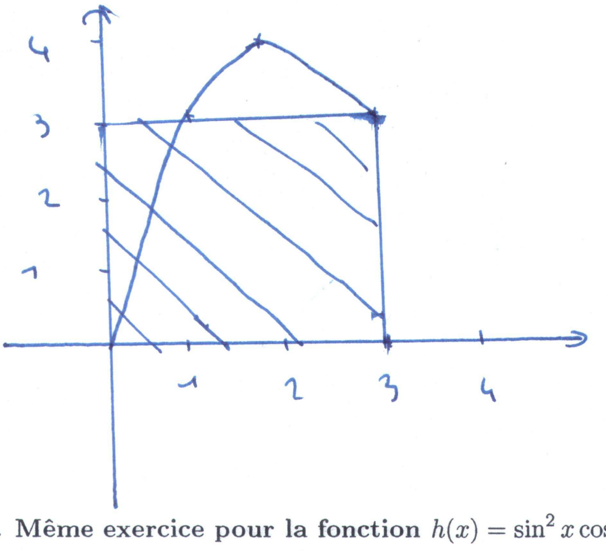
$$\Delta = 16 - 4.3 = 4.$$

$$c_1 = \frac{-4-2}{-2} = 3$$

$$c_2 = \frac{-4+2}{-2} = 1$$

f atteint sa valeur moyenne en 2 valeurs $c_1 = 3$ et $c_2 = 1$

3. Tracer le graphe de f et superposer un rectangle dont l'aire est précisément égale à l'intégrale de f entre 0 et 3.



4. Même exercice pour la fonction $h(x) = \sin^2 x \cos x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$.

Une primitive de $\sin^2 x \cos x$ est $\frac{1}{3}\sin^3 x$.