Université de Nice
Département de Mathématiques

L2MASS, Option MPAD2, année 2010-2011
Modèles Probabilistes Appliqués au Développement Durable

NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Feuille-réponses du TD 2
Dynamique de Markov et équilibre

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. :

1. Soit une chaine de Markov à 2 états de matrice de transition $\mathbb{P}$ telle que $p_{11} = 0,9$ et $p_{21} = 0,2$. Calculer l'image π_1 par la chaine de Markov de la distribution initiale $\pi_0 = (1\ ; 0)$.

2. Calculer le nombre α tel que $\pi_0^* = (\alpha\ \ (1-\alpha))$ soit une distribution stationnaire.

3. En déduire que $\lambda = 1$ est une valeur propre à gauche de la matrice $\mathbb{P}$; expliquez.

4. Calculer le carré $\mathbb{P}^2$, puis les deux produits $\pi_0\mathbb{P}^2$ et $\pi_1\mathbb{P}$. Que constatez-vous ? Expliquez.

Exercice 2. :

1. Soit la matrice $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^3$. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$, ...

2. Est-il possible que l'une des puissance de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^k$ pour $k \geq 1$, soit une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs (appelée matrice primitive) ?

3. Pour $\pi_0 = (\alpha\ ; \beta\ ; \gamma)$, calculer les images successives $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P}$, ...Qu'observez-vous ?

4. Trouver un vecteur propre à gauche de $\mathbb{P}$ de valeur propre $\lambda = 1$.