

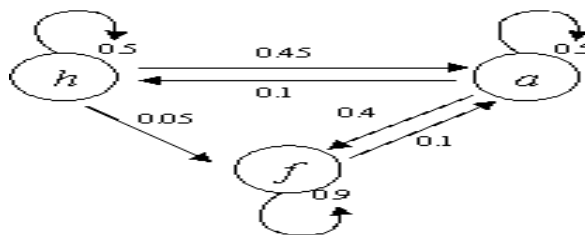
NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses de l'épreuve finale
(Durée 2 heures)

Calculatrice autorisée. Une feuille manuscrite RV autorisée

Exercice 1. : Voici le diagramme en points et flèches d'une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{h, f, a\}$, pour *herbe*, *forêt*, et *arbustes*, modélisant l'évolution de la végétation d'une parcelle laissée en friche.



1. Ecrire la matrice de transition correspondante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} & h & f & a \\ h & \dots & \dots & \dots \\ f & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ f \\ a \end{matrix}$$

2. Calculer l'image π_1 de la distribution initiale $\pi_0 = (0.2 ; 0.8 ; 0)$ en explicitant vos calculs.

3. Dans ce modèle la probabilité de passer en une étape de l'état de *forêt* à l'état d'*herbe* est nulle. En est-il de même pour la probabilité de passer de l'état de *forêt* à l'état d'*herbe* en deux étapes ? Justifier votre réponse.

4. Compléter les coefficients manquants de la matrice $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.295 & 0.25 & 0.455 \\ \dots & 0.85 & \dots \\ \dots & 0,565 & 0.335 \end{pmatrix}$

Peut-on en déduire que la matrice \mathbb{P} est primitive ?

5. Si l'on calcule avec l'ordinateur la puissance P^{40} de la matrice de transition, on trouve (en ne retenant que les 4 premières décimales)

$$\mathbb{P}^{40} = \begin{pmatrix} 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \\ 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \\ 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \end{pmatrix}.$$

Peut-on en déduire les proportions d'herbe, d'arbustes et de forêt à long terme sur cette parcelle? Expliquer pourquoi.

Exercice 2. : La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins baumiers d'Amérique du nord dont la dynamique peut être représentée par l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{4a} \right) \quad (1)$$

où $y(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t et r et a des paramètres (on néglige ici la pression exercée sur la population de chenilles par son principal prédateur). Supposons que $r = 0.1$ et $a = 2000$.

1. On sait que la solution de cette équation différentielle de condition initiale $y(0)$ est de la forme $y(t) = \frac{4ay(0)}{y(0) + (4a - y(0))e^{-rt}}$. En remplaçant les constantes par leurs valeurs, indiquer de quelle fonction il s'agit lorsque $y(0) = 200$, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$. Donner, sans calcul, une valeur approchée en $t = 100$.

2. Esquisser le graphe de cette solution.

3. Si, au lieu de choisir le modèle (1), on avait préféré un modèle malthusien $y'(t) = 0.1y(t)$, quelle serait, dans ce cas, la solution $y(t)$? Calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$.

4. Esquisser le graphe de cette solution.

5. Comparez la valeur atteinte par la population de chenilles pour des temps grands dans le modèle (1) et dans le modèle malthusien. Qu'en pensez-vous ?

6. Dans le modèle (1), la taille de la population pourrait-elle tendre vers l'infini (si par exemple sa valeur initiale $y(t)$ était très importante) ? Pourquoi ?

Exercice 3. : On possède 6 spécimens fossiles d'un animal disparu et ces spécimens sont de tailles différentes. On estime que si ces animaux appartiennent à la même espèce il doit exister une relation linéaire entre la longueur de deux de leurs os, le fémur et l'humérus. Voici les données de ces longueurs en cm pour les 5 spécimens possédant ces deux os intacts :

x=fémur	38	56	59	64	74
y=humérus	41	63	70	72	84

1. Tracer le nuage de points correspondant à ces données. Calculer les coordonnées de son centre de gravité G et ajouter ce point sur le dessin (en utilisant un autre symbole que celui des autres points du nuage).

2. Compléter le tableau suivant et en déduire les valeurs des variances et covariance demandées :

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	38	41
2	56	63
3	59	70
4	64	72
5	74	84
Moyenne :

$Var(x) =$	$Var(y) =$	$cov(x, y) =$
------------	------------	---------------

3. Déterminer, par la méthode des moindres carrés ordinaires, l'équation de la droite de régression de y en x .

$y =$

4. Tracer cette droite sur le graphique de la première question. Passe-t-elle par G ? Expliquez pourquoi.

5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire; commenter. $\rho(x, y) =$

6. Calculer la longueur, selon ce modèle, de l'humérus d'un spécimen dont le fémur mesurerait 50cm.

7. Calculer les 5 résidus et leur moyenne. Expliquez la valeur trouvée pour cette moyenne.