Université de Nice
Département de Mathématiques SV1, année 2009-2010
Mathématiques pour la Biologie (semestre1)

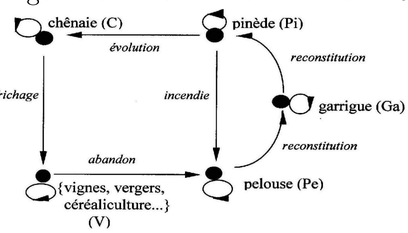
Cours 2 : Evolution vers une distribution stationnaire

Nous avons déjà rencontré la notion de *distribution stationnaire d'une chaine de Markov* qui est une répartition du système entre ses divers états ayant la propriété de rester inchangée au cours du temps. Plus précisément, si les proportions des différents états à l'instant initial sont celles d'une distribution stationnaire, alors ces proportions ne sont plus modifiées ultérieurement par la dynamique de la chaîne de Markov. On peut donc comprendre les distributions stationnaires comme une sorte d'équilibre pour le système. Une chaîne de Markov peut ne posséder aucun équilibre de la sorte, ou bien en posséder un ou plusieurs. Mais ces équilibres, lorsqu'ils existent, n'ont pas tous la même pertinence. Ceux qui vont compter vraiment sont les équilibres vers lesquels on se rapproche inéluctablement lorsque le temps s'écoule, et ce quelque soit la distribution initiale du système.

Dans cette leçon nous allons d'abord observer l'existence d'un tel équilibre sur un exemple puis indiquer comment on peut s'assurer de l'existence d'une telle distribution stationnaire vers laquelle évolue la chaîne de Markov et comment la calculer.

1 Exemple d'un écosystème méditerranéen

Considérons la dynamique suivante qui modélise l'évolution d'un écosystème méditerranéen[1]. A l'origine la forêt méditerranéenne, sur roche calcaire à faible altitude, était très certainement dominée par des chênes (chênes pubescents). Mais l'action de l'homme a éradiqué ces forêts primitives pour leur substituer parcours pastoraux, vergers, ... Puis l'abandon de toute activité agricole au lieu de conduire à la restauration naturelle de ces chênaies a bien souvent favorisé l'implantation d'une autre espèce, le pin d'Alep, après passage par un état de garrigue. Or ces forets de substitution, hautement inflammables, subissent de manière récurrente le passage du feu (incendies volontaires ou non) et sont donc condamnées à une perpétuelle reconstitution. Voici le diagramme en points et flèches correspondant et la matrice de passage de cette chaîne de Markov à 5 états $S = \{C, V, Pe, Ga, Pi\}$ ainsi que la matrice de transition $\mathbb{P}$.



$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0 & 0,25 & 0 & 0,65 \end{pmatrix}$$

La simple observation du diagramme en points et flèches, qui montre des trajectoires qui passent indéfiniment d'un état à un autre, ne suffit pas pour appréhender l'évolution à long terme de l'écosystème. Or il peut être intéressant de comprendre cette évolution pour être par exemple en mesure d'influer sur elle (pour tenter de limiter l'extension de la pinède par exemple). Etant donnée une distribution initiale π_0 que l'on aurait par exemple déterminée à partir de l'observation d'une parcelle précise (en calculant la proportion de chaque état), on a vu que l'on peut calculer l'évolution de cette distribution après une étape, π_1 en effectuant le produit $\pi_0\mathbb{P}$, après deux étapes, en multipliant à nouveau le résultat obtenu par $\mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P}$, et ainsi de suite. Mais cela ne donne pas nécessairement l'idée d'un comportement limite, s'il existe. Notons que $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P} = (\pi_0\mathbb{P})\mathbb{P} = \pi_0(\mathbb{P}\mathbb{P}) = \pi_0\mathbb{P}^2$ et plus généralement $\pi_k = \pi_0\mathbb{P}^k$.

A présent, si l'on observe les puissances successives de la matrice de transition $\mathbb{P}$ (ce que l'on peut faire facilement avec Scilab par exemple), on peut voir que, lorsque k augmente, la matrice $\mathbb{P}^k$ se stabilise peu à peu et prend la forme d'une matrice dont toutes les lignes sont (presque) égales. Par exemple on

[1]Cet exemple est tiré du livre *Modélisation et simulation d'écosystèmes*, P. Coquillard et D. Hill, Masson 1997.

obtient pour $\mathbb{P}^{40}$ la matrice suivante :

$$\mathbb{P}^{40} = \begin{pmatrix} 0,17520 & 0,11680 & 0,20437 & 0,15327 & 0,35034 \\ 0,17517 & 0,11680 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35035 \\ 0,17551 & 0,11678 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35037 \\ 0,17517 & 0,11678 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35037 \\ 0,17518 & 0,11678 & 0,20437 & 0,15328 & 0,36036 \end{pmatrix}.$$

On peut alors faire la remarque générale suivante : une matrice stochastique (donc nécessairement carrée) $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} L_1 \\ ... \\ L_n \end{pmatrix}$ dont toutes les lignes sont égales à un même vecteur ligne L^* vérifie l'égalité $L^*\mathbb{P} = L^*$. Comme L^* est de plus un vecteur dont la somme des coefficients vaut 1 (comme ligne d'une matrice stochastique), cette propriété fait de L^* un bon candidat pour être la distribution stationnaire que l'on recherche c'est-à-dire la distribution d'équilibre vers laquelle le système évolue.

Nous allons expliquer pourquoi c'est effectivement la distribution stationnaire recherchée.

Dans l'exemple, on remarquera que les lignes de $\mathbb{P}^{40}$ n'étant pas exactement identiques, on ne connaitra ainsi qu'une approximation de la répartition d'équilibre. On peut néanmoins affirmer que, quelque soit les proportions des 5 états à l'instant initial, ce modèle prévoit qu'au fil du temps, ces proportions vont s'établir à environs $17,5\%$ de chênaie, $11,7\%$ de vignes, vergers, ..., $20,5\%$ de pelouse, $15,3\%$ de garrigue et enfin 35% de pinède. En particulier, on notera que, selon ce modèle, la chênaie va se réduire à moins d'un cinquième de l'espace occupé alors que la pinède en conquiert près d'un tiers.

2 La théorie de Perron-Frobenius

Pour savoir comment trouver la distribution stationnaire limite d'une chaîne de Markov lorsqu'elle existe on applique la théorie mathématique qui porte le nom de ses deux inventeurs allemands, Ferdinand Georg Frobenius (1949-1917) et Oskar Perron (1880-1975) et qui concerne les matrice positives dont l'une des puissance est strictement positive. Ces matrices s'appellent des matrices *primitives*. Nous les étudierons plus en détail lors du prochain cours.

Selon cette théorie, toute matrice stochastique $\mathbb{P}$ qui est primitive possède un vecteur stochastique strictement positif, $\pi^\infty > 0$, et qui vérifie, pour tout π_0 stochastique (donc positif, de somme 1),

$$\lim_{k \to +\infty} \pi_0 \mathbb{P}^k = \pi^\infty.$$

Appliqué au cas d'une chaîne de Markov, ce résultat assure que si la matrice de transition de la chaîne est primitive, alors on est assuré que quelque soit la distribution initiale π_0 du système, la répartition des états va évoluer, sous l'action de la dynamique de la chaîne de Markov, vers une distribution stationnaire π^∞ qui constitue un équilibre pour le système.

La théorie de Perron-Frobenius ne s'applique pas uniquement aux matrices stochastiques, mais plus généralement à toutes les matrice positives. Nous en verrons d'autres applications plus loin.

L'une des difficultés de son application est la vérification de son hypothèse principale, la propriété pour la matrice d'être primitive. En effet, si l'on trouve, en calculant des puissances de la matrice, l'une d'entre elles qui est strictement positive, on saura que la matrice est primitive. Mais lorsque toutes les puissances calculées comportent des coefficients nuls, on ne sait pas alors si la matrice est primitive ou non Une *recette* peut cependant être utile :
Une matrice $\mathbb{P}$ de taille $n \times n$ est primitive si et seulement si $\mathbb{P}^{n^2-2n+2} > 0$.

En pratique, si l'on veut déterminer l'évolution future d'un système modélisé par une chaîne de Markov, on procèdera de la façon suivante :

1. Etablir (si c'est bien le cas) que la matrice de transition est une matrice primitive.
2. A l'aide d'un logiciel de calcul scientifique (par exemple Scilab), calculer une puissance grande de la matrice de transition, par exemple $\mathbb{P}^{40}$ $\mathbb{P}^{100}$.
3. Cette puissance ayant toutes ses lignes (presque) égales, cette ligne est une distribution stationnaire (on peut le vérifier si l'on veut).
4. La théorie de Perron-Frobenius permet alors d'affirmer que la dynamique considérée fait évoluer le système, quelque soit la distribution initiale, vers l'équilibre donné par ce vecteur propre.