NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaines de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories, *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaine de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.

2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de l'état *maquis à* l'état *forêt ?*

3. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = f, X_1 = f, X_2 = l, X_3 = m$ en fonction de $\pi_0(f)$.

4. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de l à m en une étape ? en deux étapes ?

6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0,3 \;\; 0,4 \;\; 0,3)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1. Des trois formations végétales, lesquelles progressent, lesquelles regressent ?

Exercice 2. : On suppose[1] que l'on s'intéresse à une forêt composée de deux espèces d'arbres, E1 et E2. Lorsqu'un arbre meurt, un nouveau grandit à sa place mais il peut être de l'une ou l'autre des deux espèces. Ceux de la première espèce ayant une longue durée de vie, on suppose que seuls 2% d'entre eux meurent chaque année alors que ce taux est de 4.5% pour la deuxième espèce. Mais ces derniers grandissant plus rapidement réussiront plus souvent à occuper une place laissée vacante : on suppose que 65% des places vacantes sont prises par un arbre de la deuxième espèce contre seulement 35% pour un arbre de la première espèce.

1. On modélise la dynamique de cette foret par une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ à deux états $E1$ et $E2$. Justifier la formule suivante $P(X_{t+1} = E_1/X_t = E_1) = 0,98 + 0,02 \cdot 0,35$ puis calculer de même $P(X_{t+1} = E_2/X_t = E_2)$.

2. En déduire la matrice de transition $\mathbb{P}$ de la chaîne de Markov .

3. Tracer le diagramme en points et flèches associé.

4. Si l'on commence avec une population de 100 arbres de l'espèce $E1$ et 900 de l'espèce $E2$, combien aura-t-on d'arbres de l'espèce $E1$ après une étape, après deux étapes ?

5. Calculer l'image de la distribution $\pi_0 = (0,1 \;\; 0,9)$ par cette chaîne de Markov.

6. Reprendre les deux dernières questions si l'on suppose qu'il y a au départ une proportion de cinq arbres de la première espèce contre trois de la seconde.

[1] Exemple extrait du livre "Mathematical Models in Biology", E.S. Allman et J.A. Rhodes, Cambridge University Press, 2004