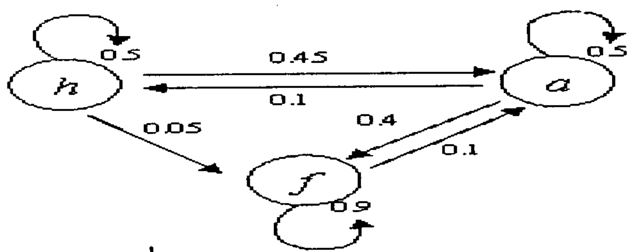
NOM :
PRENOM : Corrigé

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses de l'épreuve finale
(Durée 2 heures)

Calculatrice autorisée. Une feuille manuscrite RV autorisée

Exercice 1. : Voici le diagramme en points et flèches d'une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{h, f, a\}$, pour *herbe*, *forêt*, et *arbustes*, modélisant l'évolution de la végétation d'une parcelle laissée en friche.



Barème

Exercice 1 : 6 points

(1) 1. Ecrire la matrice de transition correspondante :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & f & a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.05 & 0.45 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ h \\ f \\ a \end{array}$$

(1) 2. Calculer l'image π_1 de la distribution initiale $\pi_0 = (0.2\ ; 0.8\ ; 0)$ en explicitant vos calculs.

$$\pi_1 = \pi_0 . \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.05 & 0.45 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2(0.5) & 0.2(0.05) + 0.8(0.9) & 0.2(0.45) + 0.8(0.1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.73 & 0.17 \end{pmatrix}$$

(1) 3. Dans ce modèle la probabilité de passer en une étape de l'état de *forêt à* l'état d'*herbe* est nulle. En est-il de même pour la probabilité de passer de l'état de *forêt à* l'état d'*herbe* en deux étapes ? Justifier votre réponse.

Selon le diagramme, on peut passer de l'état "forêt" à l'état "herbe" en deux étapes, en passant par l'état "arbre".

$$\mathbb{P}(X_2 = h / X_0 = f) = \mathbb{P}(X_2 = h / X_1 = a)\, \mathbb{P}(X_1 = a / X_0 = f)$$

$$= 0.1\ (0.1) = 0.01$$

Il y a donc une probabilité de 0.01 de passer de l'état "forêt" à l'état "herbe" en deux étapes.

(1) 4. Compléter les coefficients manquants de la matrice $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.295 & 0.25 & 0.455 \\ 0.01 & 0.85 & 0.14 \\ 0.1 & 0,565 & 0.335 \end{pmatrix}$

(1) Peut-on en déduire que la matrice $\mathbb{P}$ est primitive ?

Oui car la matrice $\mathbb{P}^2$ est strictement positive (aucun coefficient nul).

5. Si l'on calcule avec l'ordinateur la puissance P^{40} de la matrice de transition, on trouve (en ne retenant que les 4 premères décimales)

$$\mathbb{P}^{40} = \begin{pmatrix} 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \\ 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \\ 0.0377 & 0.7736 & 0.1887 \end{pmatrix}.$$

Peut-on en déduire les proportions d'herbe, d'arbustes et de forêt à long terme sur cette parcelle? Expliquer pourquoi.

(selon le théorème de Perron-Frobenius)
Comme $\mathbb{P}$ est primitive, on sait que, pour n assez grand, la matrice $\mathbb{P}^n$ a toutes ses lignes identiques et qu'elles sont égales à la distribution stationnaire π_* vers laquelle tend la dynamique. A long terme, les proportions d'herbe de forêt et d'arbustes seront donc respectivement de 3,77%, 77,36% et 18,87%.

(1)

Exercice 2: (6 points)

Exercice 2. : La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins baumiers d'Amérique du nord dont la dynamique peut être représentée par l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{4a}\right) \tag{1}$$

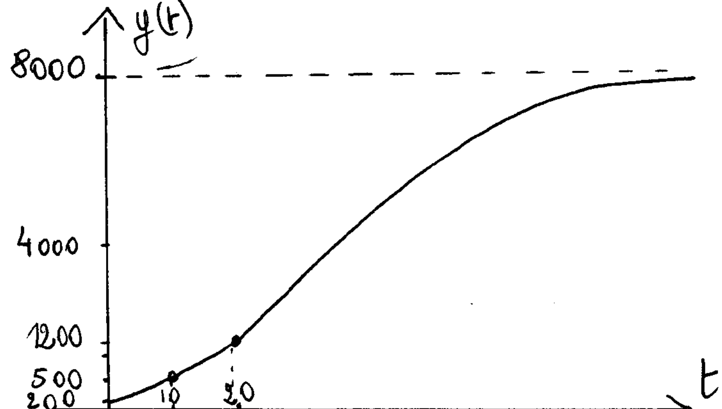
où $y(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t et r et a des paramètres (on néglige ici la pression exercée sur la population de chenilles par son principal prédateur). Supposons que $r = 0.1$ et $a = 2000$.

1. On sait que la solution de cette équation différentielle de condition initiale $y(0)$ est de la forme $y(t) = \frac{4ay(0)}{y(0)+(4a-y(0))e^{-rt}}$. En remplaçant les constantes par leurs valeurs, indiquer de quelle fonction il s'agit lorsque $y(0) = 200$, puis calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$. Donner, sans calcul, une valeur approchée en $t = 100$.

Lorsque $y(0) = 200$, la solution $y(t)$ vaut
$y(t) = \frac{8000\, y(0)}{y(0)+(8000-y(0))\, e^{-0.1t}} = \frac{8000}{1+39 \exp(0.1\, t)}$
D'où $y(10) \simeq 521,26$ et $y(20) \simeq 1274,27$
Pour $t = 100$, $y(t)$ est proche de sa capacité biotique $4a$, donc $y(100) \simeq 8000$.

(2)

2. Esquisser le graphe de cette solution.



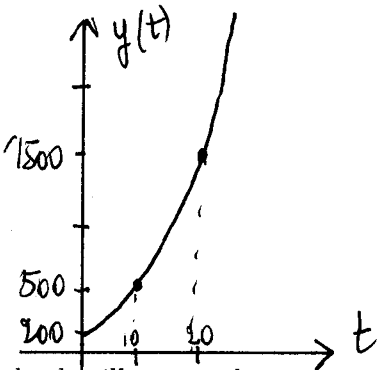
(0.5)

3. Si, au lieu de choisir le modèle (1), on avait préféré un modèle malthusien $y'(t) = 0.1y(t)$, quelle serait, dans ce cas, la solution $y(t)$? Calculer sa valeur aux temps $t = 10$ et $t = 20$.

La solution de cette équation différentielle linéaire est
$y(t) = y(0)\, e^{0.1\, t} = 200\, e^{0.1\, t}$ pour $y(0) = 200$.
Donc $y(10) \simeq 543,65$ et $y(20) \simeq 1477,8$

(1)

4. Esquisser le graphe de cette solution.



(0.5)

5. Comparez la valeur atteinte par la population de chenilles pour des temps grands dans le modèle (1) et dans le modèle malthusien. Qu'en pensez-vous ?

Lorsque t tend vers l'infini, la solution du modèle logistique (1) tend vers sa capacité biotique 8000 alors que celle du modèle malthusien tend vers l'infini. Elle peut donc atteindre des valeurs très grandes, ce qui n'est pas très réaliste. C'est la raison pour laquelle on préfère, en général, le modèle (1).

(1)

6. Dans le modèle (1), la taille de la population pourrait-elle tendre vers l'infini (si par exemple sa valeur initiale $y(t)$ était très importante) ? Pourquoi ?

Non, elle ne peut pas tendre vers l'infini, même si $y(0)$ est grand car, dans tous les cas, elle tend vers la capacité biotique, en croissant si $y(0) < 8000$ et en décroissant si $y(0) > 8000$.

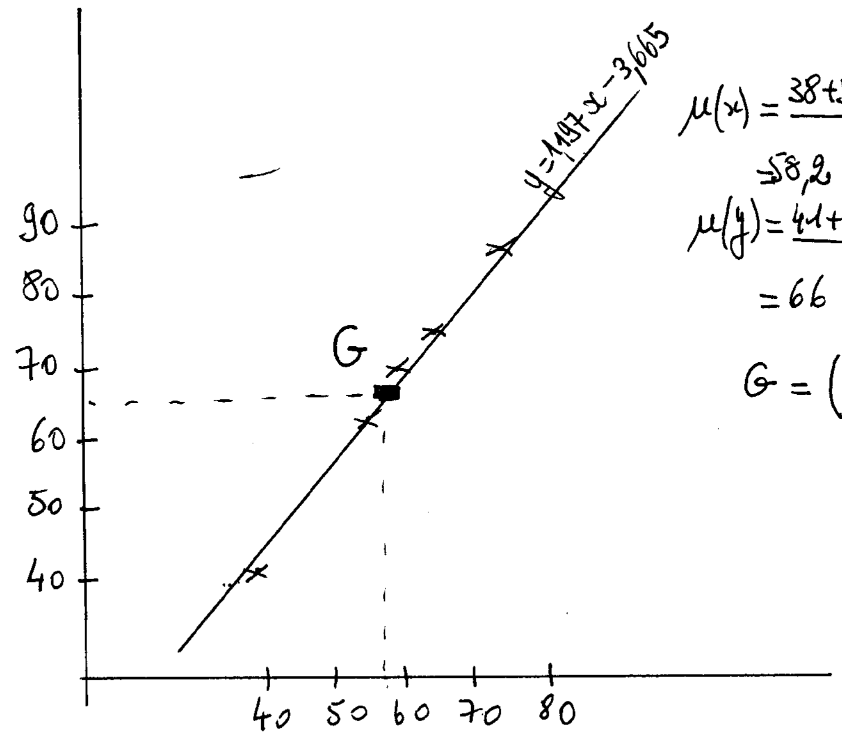
(1)

Exercice 3
(8 points)

Exercice 3. : On possède 6 spécimens fossiles d'un animal disparu et ces spécimens sont de tailles différentes. On estime que si ces animaux appartiennent à la même espèce il doit exister une relation linéaire entre la longueur de deux de leurs os, le fémur et l'humérus. Voici les données de ces longueurs en cm pour les 5 spécimens possédant ces deux os intacts :

x=fémur	38	56	59	64	74
y=humérus	41	63	70	72	84

1. Tracer le nuage de points correspondant à ces données. Calculer les coordonnées de son centre de gravité G et ajouter ce point sur le dessin (en utilisant un autre symbole que celui des autres points du nuage).



$\mu(x) = \dfrac{38+56+59+64+74}{5}$
$= 58,2$

$\mu(y) = \dfrac{41+63+70+72+84}{5}$
$= 66$

$G = (58,2 ; 66)$

(2)

2. Compléter le tableau suivant et en déduire les valeurs des variances et covariance demandées :

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	38	41	1444	1681	1558
2	56	63	3136	3969	3525
3	59	70	3481	4000	4130
4	64	72	4096	5184	4608
5	74	84	5476	7056	6216
Moyenne :	53,2	66	3526,6	4558	4008

$Var(x) = 3526,6 - (58,2)^2 = 139,36$

$Var(y) = 4558 - (66)^2 = 2002$

$Cov(x,y) = 4008 - (58,2)(66) = 166,8$

$Var(x) = 139,36$ $Var(y) = 209$ $cov(x,y) = 166,8$

3. Déterminer, par la méthode des moindres carrés ordinaires, l'équation de la droite de régression de y en x.

L'équation de la droite est :

$y = \hat{a} x + \hat{b}$. avec $\hat{a} = \dfrac{Cov(x,y)}{Var(x)} = \dfrac{166,8}{139,36} = 1,197$

et $\hat{b} = \mu(y) - \hat{a}\mu(x) = 66 - (1,197)(58,2)$
$= -3,665$

$y = 1,197\,x - 3,665$

4. Tracer cette droite sur le graphique de la première question. Passe-t-elle par G ? Expliquez pourquoi.

La droite de régression linéaire passe par le centre de gravité du nuage de point. En effet le point $G = \begin{pmatrix}\mu(x)\\ \mu(y)\end{pmatrix}$ vérifie l'équation $y = \hat{a} x + b$ puisque $\mu(y) = \hat{a}\mu(x) + \hat{b}$.

5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire ; commenter. $\rho(x,y) = 0,994$

$\rho(x,y) = \dfrac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)\,Var(y)}} = \dfrac{166,8}{\sqrt{139,36 \cdot 209}} \simeq 0,994$

Comme ρ est proche de 1, on peut en déduire que x et y sont fortement corrélés positivement.

6. Calculer la longueur, selon ce modèle, de l'humérus d'un spécimen dont le fémur mesurerait 50cm.

$\hat{y}(50) = 1,197\,(50) - 3,665 = 56,185$

Donc, selon ce modèle, l'humérus mesure 56,2 cm environs.

7. Calculer les 5 résidus et leur moyenne. Expliquez la valeur trouvée pour cette moyenne.

$\varepsilon_1 = 41 - (1,197(38) - 3,665) = -0,821$

$\varepsilon_2 = 63 - (1,197(56) - 3,665) = -0,367$

$\varepsilon_3 = 70 - (1,197(59) - 3,665) = 3,042$

$\varepsilon_4 = 72 - (1,197(64) - 3,665) = -0,943$

$\varepsilon_5 = 84 - (1,197(74) - 3,665) = 0,913$

Par construction $\mu(\varepsilon) = 0$ car $\varepsilon_i = y_i - (\hat{a} x_i + \hat{b})$

donc $\mu(\varepsilon) = \mu(y) - (\hat{a}\,\mu(x) + \hat{b}) = 0$.