NOM : Corrigé
PRENOM :

Groupe :

Date : 13-17 septembre 2010 .

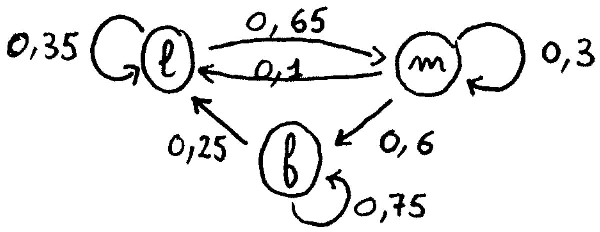
Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaines de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories, *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaine de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} l & m & f \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{array}{c} l \\ m \\ f \end{array} \end{array}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.



2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l'état *forêt* à l'état *lande* ?

Cette probabilité est dans la 3^e ligne (f) et la 1^e colonne (l) :
$P(X_{t+1} = l \,/\, X_t = f) = 0,25$

3. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = m, X_1 = f, X_2 = f, X_3 = l$ en fonction de $\pi_0(m)$. $P(X_0 = m, X_1 = f, X_2 = f, X_3 = l) =$
$P(X_0 = m) . P(X_1 = f / X_0 = m) . P(X_2 = f / X_1 = f) . P(X_3 = l / X_2 = f) =$
$\pi_0(m) . 0,6 . 0,75 . 0,25 = \pi_0(m) . 0,1125$

4. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

$X_0 = l, X_1 = f$ ou $X_0 = m, X_1 = f, X_2 = m$ ou ...

5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l à f en une étape ? en deux étapes ?

En une étape : $P(X_{t+1} = f / X_t = l) = 0$
En deux étapes : $P(X_{t+2} = f / X_t = l) = P(X_{t+2} = f / X_{t+1} = l) . P(X_{t+1} = l / X_t = l) +$
$P(X_{t+2} = f / X_{t+1} = m) . P(X_{t+1} = m / X_t = l) + P(X_{t+2} = f / X_{t+1} = f) . P(X_{t+1} = f / X_t = l) =$
$0 . 0,35 + 0,6 . 0,65 + 0,75 . 0 = 0,39$

6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0,4 \;\; 0,4 \;\; 0,2)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1. Des trois formations végétales, lesquelles progressent, lesquelles regressent ?

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = (0,4 \;\; 0,4 \;\; 0,2) \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,23 \;\; 0,38 \;\; 0,39)$$

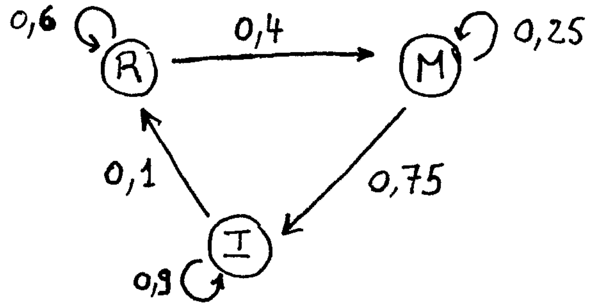
La forêt progresse de 20% à 39%, la lande et le maquis régressent.

Exercice 2 .[1] **. :** Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insectes. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de $0,9$ ou passer à l'état R avec une probabilité $0,1$; étant malade, il peut le rester avec probabilité $0,25$ ou devenir imunisé avec probabilité $0,75$; enfin, étant dans l'état R, il peut le rester avec probabilité $0,6$ ou devenir malade avec probabilité $0,4$.

1. On modélise la dynamique des individus de ce milieu par une chaine de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ à trois états R, M et I. Ecrire la matrice de transition $\mathbb{P}$ de cette chaine de Markov.

$$\begin{array}{c} \\ R \\ M \\ I \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & M & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbb{P}$$

2. Tracer le diagramme en points et flèches associé.



On ne représente pas les changements d'état dont la probabilité est nulle.

3. Si l'on commence avec une population de 1000 individus comportant 100 individus malades, et 900 individus ni malades ni immunisés, combien aura-t-on d'individus malades après une étape, après deux étapes ? $\pi_0 = (900\,R, 100\,M, 0\,I)$

$$\pi_1 = (900, 100, 0)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (540\,R, 385\,M, 75\,I)$$

soit 385 malades après une étape

$$\pi_2 = \pi_1 \mathbb{P} = (540, 385, 75)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (\_\ R, 312,25\,M, \_\ I)$$

soit 312,25 malades après 2 étapes. Je n'ai calculé que le produit $\pi_1 \times 2^e$ colonne

4. Même question si l'on suppose qu'il y a au départ 150 individus malades, 500 individus ni malades ni immunisés et 350 individus immunisés. $\pi_0 = (500\,R, 150\,M, 350\,I)$

$$\pi_1 = (500, 150, 350)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (335\,R, 237,5\,M, 427,5\,I)$$

soit 237,5 malades après une étape

$$\pi_2 = \pi_1 \mathbb{P} = (335, 237,5, 427,5)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} = (\_\ R, 193,375\,M, \_\ I)$$

soit 193,375 malades après deux étapes.

---

[1](Exercice inspiré du texte en ligne à http ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html)